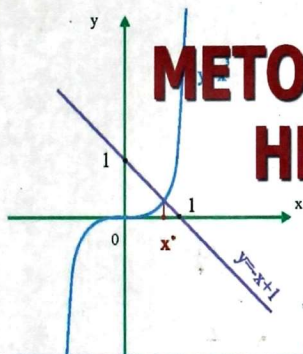


САГЫНДЫКОВ М. К.,  
 КОЖОБЕКОВ К. Г.,  
 АБДИЛАЗИЗОВА А. А.

# САНДЫК МЕТОДДОРДУН НЕГИЗДЕРИ



```
var a,b,e,
    m:byte,
BEGIN
  clrscr;
  writeln('Тамыр изделуу');
  write('a=');readln(a);
  write('b=');readln(b);
  write('Тактыкты кийир F
```



22.13  
С 13

**М.К. Сагындыков**  
**К.Г. Кожобеков**  
**А.А. Абдилазизова**

# **САНДЫК МЕТОДДОРДУН НЕГИЗДЕРИ**

7866.

ОШ МАККАБЕЛТИК УНИВЕРСИТЕТИ  
КИТЕПКАНА //  
ИНБ № 961318

УДК 511  
ББК 22.13  
С 13

**Рецензенттер:**

физика–математика илимдеринин доктору,  
профессор **А. Сопуев**;  
физика–математика илимдеринин кандидаты,  
доцент **А. Артыков**.

**М.К. Сагындыков.** Сандык методдордун негиздери. Окуу китеби / М.К. Сагындыков, К.Г. Кожобеков, А.А. Абдилазизова – Ош: 2011. –180 б.

ISBN 978-9967-03-703-8

Окуу китеби сызыктуу эмес тендемелер, сызыктуу тендемелер системасы, дифференциалдык тендемелер үчүн, ошондой эле, функцияны интерполяциялык көп мүчөлөрдүн жардамында аппроксимациялоого негизделген сандык дифференцирлөө жана интегралдоо үчүн сандык методдордун негиздери жөнүндөгү негизги маалыматтарды камтыйт. Каралган методдор үчүн алардын алгоритмдери, материалды жакшы түшүнүүгө түрткү берүүчү көптөгөн маселе, мисалдарды чыгаруу менен бышыкталып, өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр берилген.

Окуу китеби жогорку окуу жайларынын студенттерине жана жалпы эле сандык методдорду даяр инструмент катары пайдалануучу адистерге арналат.

**Окуу китеби Ош МУ нун Окумуштуулар Кеңешинин чечими менен жарык көрүүгө сунушталды. Токтом №5, 04.04.2011-ж.**

С 1602030000-11

УДК 511  
ББК 22.13

ISBN 978-9967-03-703-8

© **М.К. Сагындыков,**  
**К.Г. Кожобеков,**  
**А.А. Абдилазизова, 2011**

<b>КИРИШҮҮ</b> .....	5
<b>1-ГЛАВА. ЭСЕПТӨӨ ЖҮРГҮЗГӨНДӨН КИЙИНКИ ТАКТЫК ЖӨНҮНДӨ</b> .....	9
1.1. Жакындатылган сандар.....	9
1.1.1. Компьютерде сандардын жазылышы.....	9
1.1.2. Абсолюттук жана салыштырмалуу каталыктар.....	11
1.1.3. Жакындатылган сандардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар.....	13
1.2. Эсептөө каталыктары.....	15
2.1.1. Каталыктын булактары жана классификациясы.....	15
2.1.2. Каталыктарды азайтуу ыкмалары.....	16
2.1.3. Туруктуулук, коррективдүүлүк, жыйналуучулук жана туруксуз методдордун жана маселелердин мисалдары.....	17
Көнүгүүлөр.....	22
<b>2-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕЛЕР</b> .....	23
2.1. Маселенин коюлушу.....	23
2.2. Тамырларды ажыратуу.....	25
2.3. Кесиндини тең экиге бөлүү методу (бисекция методу).....	31
2.4. Хорда методу.....	36
2.5. Ньютондун методу (жанымалар методу).....	40
2.6. Жөнөкөй итерация методу.....	45
2.7. Алгебралык теңдемелерди чыгаруу методдору жөнүндө.....	49
2.7.1. Көп мүчөнүн маанисин эсептөө ыкмалары.....	49
2.7.2. Алгебралык теңдемелердин тамырларын табуу.....	51
Көнүгүүлөр.....	55
<b>3-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ</b> .....	57
3.1. Негизги түшүнүктөр.....	57
3.1.1. Сызыктуу теңдемелер.....	57
3.1.2. Жалпы көрүнүштөгү системаны чыгаруу эрежеси.....	61
3.1.3. Сызыктуу системаларды чыгаруу методдору жөнүндө.....	62
3.1.4. Сызыктуу алгебранын башка маселелери.....	64
3.2. Түз методдор.....	67
3.2.1. Крамердин эрежеси.....	67
3.2.2. Гаусстун методу.....	68
3.2.3. Аныктагыч жана тескери матрица.....	75
3.2.4. Прогонка методу.....	76
3.3. Итерация методдору.....	80
3.3.1. Чечимди тактоо.....	80
3.3.2. Жөнөкөй итерация методу.....	82
3.3.3. Гаусс – Зейделдин методу.....	85
3.4. Матрицанын өздүк маанилери жана өздүк векторлору.....	90
Көнүгүүлөр.....	93

<b>4-ГЛАВА. ФУНКЦИЯНЫ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛОО</b> .....	<b>95</b>
4.1. Маселенин коюлушу.....	95
4.2. Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсү.....	97
4.3. Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсү.....	101
4.4. Интерполяция тактыгы.....	106
4.5. Тескери интерполяция.....	107
4.6. Функциянын таблицасын тыгыздаштыруу.....	109
Көнүгүүлөр.....	111
<b>5-ГЛАВА. САНДЫК ДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ</b> .....	<b>113</b>
5.1. Маселенин коюлушу.....	113
5.2. Ньютондун биринчи жана экинчи интерполяциялык формулаларына негизделген, жакындатып дифференцирлөө формулалары.....	114
5.3. Бирдей аралыктагы түйүндөрдөгү Лагранждын интерполяциялык формуласына негизделген сандык дифференцирлөө.....	116
5.4. Аныкталбаган коэффициенттер методу.....	116
Көнүгүүлөр.....	120
<b>6-ГЛАВА. САНДЫК ИНТЕГРАЛДОО МЕТОДДОРУ</b> .....	<b>122</b>
6.1. Маселенин коюлушу.....	122
6.1.2. Анык интеграл түшүнүгү.....	123
6.2. Сандык интегралдоо алгоритмдери.....	125
6.2.1. Тик бурчтуктар методу.....	125
6.2.2. Ньютон-Котэстин квадратуралык формулалары.....	129
6.2.3. Трапециянын формуласы.....	1322
6.2.4. Симпсондун формуласы.....	134
6.3. Сандык интегралдоо формулаларынын тактыгы жөнүндө.....	138
6.4. Чебышевдин квадратуралык формуласы.....	143
6.5. Өздүк эмес интегралдарды жакындатып эсептөө.....	148
6.6. Эселүү интегралдар.....	153
6.7. Симпсон тибиндеги кубатуралык формула.....	157
Көнүгүүлөр.....	159
<b>7-ГЛАВА. КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ</b> .....	<b>161</b>
7.1. Маселенин коюлушу.....	161
7.2. Пикардын методу.....	164
7.3. Эйлердин методу.....	167
7.4. Эйлердин жакшыртылган методу.....	172
7.5. Рунге-Куттанын методдору.....	174
7.6. Адамстын методу.....	176
Көнүгүүлөр.....	178
<b>АДАБИЯТТАР</b> .....	<b>179</b>

## КИРИШҮҮ

Математика, илим катары практикалык маселелерди чечүү зарылчылыгына байланыштуу пайда болгон. Анын натыйжасында математика, сандык математика болуп, негизги максаты чечимди сан көрүнүштө алуу эсептелген. Азыркы учурда математиканын колдонулуштарынын тездик менен кеңейтилиши, эсептөө техникаларынын, тактап айтканда компьютерлердин өнүгүшүнө байланыштуу. Аны менен катар, адам баласынын турмушундагы бардык иштерде компьютердин киргизилиши, алардан кайсыл бир деңгээлде компьютерди үйрөнүүнү жана иштей билүүнү талап кылууда.

Бүгүнкү күндө, математикалык эсептөөлөрдү жүргүзүүдө компьютерди колдонуу актуалдуулугун жоготкон жок. Анткени анын колдонулушу так илимдерге, ошондой эле техникалык жана экономикалык илимдерге эле эмес, химия, биология, медицина, психология, лингвистика ж.б. адистиктерге да кеңири жайылтылды. Компьютерди, эсептөө инструменти катары пайдаланган, колдонуучу-адистердин өтө көп категориялары пайда болгондуктан, алар үчүн негизги дисциплина болуп эсептөө математикасы саналат. Эсептөө математикасы түрдүү процесстердин моделин түзүү теориясын үйрөтөт жана математикалык маселелерди чечүүнүн сандык методдорун изилдейт.

Адатта, сандык методдорду жогорку квалификациялуу математик-адистер изилдейт жана иштеп чыгат. Ал эми инженердик-техникалык жана көпчүлүк математикалык эмес адистиктерде окуган студенттер үчүн эң маанилүүсү, сандык методдордун негизги идеяларын, методдорун, өзгөчөлүктөрүн жана колдонуу областарын билүүсү өтө зарыл. Бул категориядагы адистер сандык методдорду толук изилдөө үчүн жетишээрлик математикалык билимге ээ болбогондуктан, алар сандык методдорду даяр инструмент катары, өздөрүнүн практикалык иштеринде пайдалана билиши керек.

Эсептөө техникалары илимий изилдөөлөрдө, татаал эсептөөлөрдү жүргүзүүдө эффективдүү колдонулуштарды тапты. Чындыгында, заманбап компьютерлер бир секунданын ичинде, адам өмүр бою эсептесе дагы бүтө албаган эсептөөлөрдү аткарат.

Жалпы учурда, компьютерди пайдаланып маселени чечүү процессин төмөнкү этаптарга бөлүүгө болот:

- маселенин коюлушу;
- математикалык моделин түзүү;
- сандык методду иштеп чыгуу;

- алгоритмин иштеп чыгуу;
- алгоритмди программалоо тилдеринин биринде жазуу;
- программаны оңдоп түзөө;
- эсептөөлөрдү жүргүзүү;
- жыйынтыкты анализдөө.

Биринчи этап, маселенин физикалык жактан мазмундуу коюлушунан жана чечүүнүн түпкү максатын аныктоодон турат. Эң эле татаал жана жоопкерчиликтүү этап болуп, математикалык моделди түзүү саналат, б.а. маселенин кыска жана так математикалык жазылышы. Математикалык модел, физикалык процесстердин негизги закондорун так жана туура баяндашы керек. Компьютер жөнөкөй гана операцияларды аткаргандыктан, ал математикалык жазылыштагы маселенин коюлушун түшүнбөйт. Аны чечүү үчүн, маселени кандайдыр бир эсептөө алгоритмине алып келүүгө мүмкүндүк берген, эсептөө математикасы боюнча адистер түзгөн, сандык методду табуу керек. Ал эми маселени чечүү үчүн колдонуучу адис, түзүлгөн методдордун ичинен конкреттүү учурга жарамдуу болгон, керектүүсүн гана тандап алат.

Алгоритмди түзүү этабында - маселени чечүү процесси, акыркы жыйынтыкка алып келе турган, элементардык арифметикалык жана логикалык операциялардын удаалаштыгы көрүнүштө жазылып, алгоритм деп аталат. Алгоритмди, аткаруучунун айрым аракеттерин сүрөттөөчү фигуралардан, аларды байланыштыруучу жана аткаруу ыраатын көрсөтүүчү жебелерден турган блок-схема көрүнүштө көрсөтүүгө болот.

Кийинки этапта маселени чечүү алгоритми, операциялардын так аныкталган удаалаштыгы көрүнүштө, машинага түшүнүктүү тилде б.а. программалоо тилдеринин биринде жазылып, программа деп аталат. Ал эми анын машиналык тилге которулушу эсептөө системасы тарабынан ишке ашырылат. Программаны компьютерге кийиргенде ар кандай каталыктарга жол беребиз. Андыктан, машинада программаны оңдоп түзөөгө, программаны текшерүү, каталарды издөө жана табылган каталардын мазмунун аныктоо, аларды оңдоо кирет. Эсептөөлөрдү жүргүзүү этабында, эсептөө үчүн баштапкы берилгендерди кийирип, оңдоп түзөлгөн программа боюнча эсепти жүргүзөбүз. Демек, алынган жыйынтык анализделип, жогорудагы этаптар боюнча конкреттүү бир маселени чечүү процессинин жыйынтыгында, илимий-техникалык документация бүткөн түргө келтирилип, бир лабораториялык жумуш катары аткарылган болот.



Көптөгөн класстагы маселелерди чечүү үчүн, эсептөөчүнүн ишин жеңилдеткен программалык пакеттер түзүлгөн, мисалы, Math-Cad, Maple, MatLab, Mathematica ж.б. Ал программаларга эсептөөчү маселени коюлушун жана баштапкы берилгендерди гана кийирет, ал эми методду тандоону, эсептөөнү жүргүзүүнү, жыйынтыкты чыгарууну программа өзүнө алат, бул учурда жакындатылган гана чечим алынышын эстен чыгарбайлы. Демек, компьютерди пайдаланып колдонмо маселелерди чечүүчү адис сандык методдордун негиздери жөнүндө, компьютердин мүмкүнчүлүктөрү боюнча тааныштыгы болуш керек жана алынган жыйынтыкты анализдей алышы зарыл. Компьютердин жардамында маселени чечүү процессинин дагы бир маанилүү учуру болуп, маселени чечүүдө тандалган ыкманын, сандык методдун экономдуулугу эсептелет.

Математикалык моделдөөнүн жардамында, илимий-техникалык маселелерди чечүү математикалык маселелерди чечүүгө алынып келет. Ал эми математикалык маселелерди чечүү үчүн, методдордун негизги үч группасы колдонулат: аналитикалык, графикалык жана сандык.

**Аналитикалык методдорду** колдонгон учурда, маселенин чечимин формулалардын жардамы менен туюнтууга болот. Эгерде математикалык маселе жөнөкөй алгебралык же трансценденттик теңдемелерди, сызыктуу теңдемелер системасын, дифференциалдык теңдемелерди ж.б. чечүүдөн турса, анда жогорку математика курсунан белгилүү болгон ыкмалардын жардамында чечимин табууга болот.

**Графикалык методдор** изделүүчү чоңдуктун тартибин бир катар учурларда баалоого мүмкүндүк берет. Бул методдордун негизги идеясы, чечимди геометриялык түзүүлөр жолу менен табуудан турат. Мисалы,  $F(x) = 0$  теңдемесинин тамырларын табуу үчүн,  $y = F(x)$  функциясынын графиги түзүлүп, аны менен абсцисса огунун кесилишкен чекиттери табылат. Бул чекиттер изделүүчү тамыр болот. Графикалык методдорду чечимге баштапкы жакындатууну алуу үчүн дагы колдонсок болот, андан кийин ал жакындатылган чечим сандык методдордун жардамы менен такталат.

Азыркы учурда татаал математикалык маселелерди чечүү үчүн негизги инструмент болуп, маселенин чечимин сандардын үстүнөн болгон чектүү сандагы арифметикалык амалдарды аткарууга алып келүүгө мүмкүндүк берген **сандык методдор** эсептелет. Бул учурда чечим сандык маанилер көрүнүштө же таблицада алынат. Сандык методдордун аналитикалык методдордон маанилүү айырмачылыгы, би-

ринчиден, сандык методдор маселенин жакындатылган чечимин гана алууга мүмкүндүк берет, экинчиден, параметрлердин жана баштапкы берилгендердин конкреттүү маанилеринде гана маселенин чечимин алабыз.

Сунушталып жаткан окуу китебинде ар түрдүү практикалык маселелерди сандык методдордун жардамы менен чечүү жөнүндөгү зарыл болгон негизги маалыматтар берилген. Баяндалган материалдар окурмандар үчүн түшүнүктүү деңгээлде жазылып жана керектүү учурда жогорку математика, математикалык анализ курстарынан белгилүү болгон негизги маалыматтар эске салынган. Каралган методдор үчүн алардын алгоритмдери, айрымдарына Turbo Pascal 7.0 тилиндеги жекече учурга түзүлгөн программанын тексттери, ошондой эле, материалды жакшы түшүнүүгө түрткү берүүчү маселени чыгаруу мисалдары менен бышыкталган. Адабияттар тизмегине мына ушул окуу куралын даярдоодо пайдаланылган, кээ бир орус тилиндеги гана окуу китептери киргизилген. Ал тизмеге кирген жана кирбей калган китептерден курстун бөлүмдөрү боюнча кошумча маалыматтарды жана ар түрдүү колдонмо мүнөздөгү маселелерди табууга болот. Бул окуу куралы кыргыз тилинде жазылган сандык методдор жөнүндө негизги маалыматтарды камтыган алгачкы китеп болгондуктан, алдын ала ыраазычылык билдирүү менен, сын-пикирлериниздер бөлсө, [sagyndykov@mail.ru](mailto:sagyndykov@mail.ru) электрондук дарек боюнча же кат жүзүндө, 723500 Ош шаары, Ленин көчөсү 331, 202-кабинет; дареги боюнча жөнөтүүнүздөрдү суранабыз.

# 1-ГЛАВА. ЭСЕПТӨӨ ЖҮРГҮЗГӨНДӨН КИЙИНКИ ТАКТЫК ЖӨНҮНДӨ

## 1.1. Жакындатылган сандар.

### 1.1.1. Компьютерде сандардын жазылышы.

Азыркы замандагы компьютерлер төмөндө келтирилген формалардын биринде жазылган сандар менен операция кылат. Сандар компьютерлердин эсине ар түрдүү ыкмада берилет. Компьютерлер (процессорлор), эреже катары бүтүн сандарды, ошондой эле чекити жылуучу формадагы бөлчөктүү сандарды иштетүүгө мүмкүндүк берет. Белгилүү болгондой, бүтүн сандардын көптүгү чексиз. Бирок процессор, разряддык торунун чектелгендигинин кесепетинен, бул көптүктүн кээ бир чектелген камтылуучу көптүктөрү менен гана операция кыла алат. Демек, компьютердин эсинде берилүүчү бүтүн сандардын көптүгү чектелүү. Заманбап компьютерлерде, бүтүн сандарды сактоо үчүн дайыма 4 байт эс бөлүнүп берилгендиктен, болжолдуу түрдө  $-2 \cdot 10^9$  дан баштап  $2 \cdot 10^9$  га чейинки арымда жаткан бүтүн сандарды берүүгө болот.

Илимий-техникалык маселелерди чечүүдө негизинен чыныгы сандар пайдаланылат. Компьютерде алар чекити жылуучу формада көрсөтүлөт. Чекити жылуучу формада  $D$  ондук саны  $D = \pm m \cdot 10^n$  көрүнүштө жазылат, мында  $m$  – мантисса, ал эми даража көрсөткүчү болгон  $n$  анын ирети болуп саналат. Мисалы,  $-163.8$  (кээде ондук чекиттин ордуна үтүр колдонулат) санын төмөнкү көрүнүштөрдүн биринде жазууга болот:

$$-1638 \cdot 10^{-1} = -1.638 \cdot 10^2 = -0.1638 \cdot 10^3.$$

Мында акыркысы чекити жылуучу сандын *нормалдаштырылган формада* жазылышы. Ошондуктан, эгерде сандын мантиссасын  $m = 0.d_1d_2 \dots d_k$  көрүнүштө көрсөтсөк, анда  $d_1 \neq 0$  болгон учурда чекити жылуучу сандын нормалдаштырылган формасын алабыз. Башкача айтканда, мантисса бирден кичине жана биринчи маани берүүчү сан нөл эмес. Компьютердин эсинде мантисса маани берүүчү гана сандарды камтуучу бүтүн сан катары жазылат, мында нөл жана чекит сакталбайт. Мындан ары чекити жылуучу сандар жөнүндө айтылганда, так эле нормалдаштырылган форма жөнүндө айтылат. Санды,  $-163.8$  көрүнүштө жазуу, чекити туруктуу формада жазылышы деп аталат. Азыркы убакта компьютерлерде, сандын чекити туруктуу

формада жазылышы, кийирүү жана чыгаруу этабында гана пайдаланылат.

Чекити жылуучу сандар жөнүндө жогоруда айтылгандардын баары, башка эсептөө системасында жазылган сандарга дагы таралат.  $A$  санын,  $\alpha$  негизиндеги эсептөө системасында  $A = \pm 0.a_1a_2 \dots a_k \cdot \alpha^n$  көрүнүштө көрсөтүүгө болот, мында  $a_1, a_2, \dots, a_k$  -сандары  $0, 1, \dots, \alpha - 1$  арымындагы бүтүн сандар. Бул жазуудан, компьютер конкреттүү операция кыла турган чыныгы сандардын камтылуучу көптүгү чексиз болуп саналбайт. Ал чектүү жана  $k$  разряддуулугу, ошондой эле  $n_1, n_2$  ( $n_1 \leq n \leq n_2$ ) иреттин чектери менен аныкталат. Бул камтылуучу көптүк

$$N = 2(\alpha - 1)(n_2 - n_1 + 1)\alpha^{k-1} + 1$$

санды камтыйт, ошондой эле, модулу боюнча эң кичине жана эң чоңу болуп, тиешелүү машиналык нөл жана машиналык чексиздик деп аталган

$$M_0 = (\alpha - 1)\alpha^{n_1-1} \quad \text{жана} \quad M_\infty = (1 - \alpha^{-k})\alpha^{n_2}$$

сандары эсептелет.

$n_1, n_2$  иреттин чектери чондугу боюнча чыныгы сандардын чектелгендигин, ал эми  $k$  разряддуулугу - сан огунун кесиндисинде алардын дискреттүү бөлүштүрүлүшүн аныктайт. Мисалы, сандар тегеректелген учурда (0.47505, 0.47515) аралыктагы төрт разряддуу ондук сандардын бардык маанилерин, 0.4751 саны менен көрсөтүүгө болот. Эгерде, бул 0.4751 санга, модулу боюнча кичине болгон 0.00005 санды кошсок, жыйынтыгында ошол эле 0.4751 саны алынат.

Азыркы убакта көпчүлүк процессор өндүрүүчүлөр, чекити жылуучу экилик сандардын үстүнөн арифметикалык операцияларды аткаруу үчүн, IEEE 754 (IEEE - Электроника жана электротехника боюнча инженерлердин институту, АКШ) стандартын колдонушат. Бул стандарт эки экилик ( $\alpha = 2$ ) форматты өз ичине алат: бир эселүү тактыгы жана эки эселүү тактыгы менен. Бул форматтар үчүн  $k, n_1, n_2$  маанилерине эстен бөлүнүп берилген өлчөмдөрү жана  $M_0, M_\infty$  дин жакындатылган маанилери төмөнкү таблицанда келтирилген.

тактыгы	байттары	$k$	$n_1$	$n_2$	$M_0$	$M_\infty$
бир эселүү	4	24	-125	128	$1.2 \cdot 10^{-38}$	$3.4 \cdot 10^{38}$
эки эселүү	8	53	-1021	1024	$2.2 \cdot 10^{-308}$	$1.8 \cdot 10^{308}$

Адам баласы үчүн ондук эсептөө системасы ыңгайлуу болгондуктан ондук разрядка, көрсөтүлгөн канча  $k$  экилик разряды туура

келет деген суроо туулат. Мында  $k$ , 6-9 ондук разрядка бир эселүү тактыкта жана 15-17 ондук разрядка эки эселүү тактык учурунда ылайык келет деп эсептөөгө болот.

Азыркы программалоо тилдеринде бир эселүү жана эки эселүү тактыкта анык сандарды берүү үчүн берилгендердин типтери каралган. Мисалы, Си тилинде бул типтер *float* жана *double*, Паскаль тилинде - *single* жана *double*, Фортран тилинде - *real* жана *double precision*. Турбо Паскаль 7.0 тилинде бардык анык типтер төмөнкү таблицада каралган:

типтери	арымы	мантисса	байттары
<i>real</i>	$2.9E-39 \dots 1.7E38$	11-12	6
<i>single</i>	$1.5E-45 \dots 3.4E38$	7-8	4
<i>double</i>	$5.0E-324 \dots 1.7E308$	15-16	8
<i>extended</i>	$3.4E-49321 \dots 1E4932$	19-20	10

Өзгөрүлмө анык типтерди төмөнкүдөй баяндоого болот:

*var*

*a, b: double;*

*c: single;*

Демек, компьютер анык сандардын жакындатылган маанилери менен операция кылат. Ал эми жакындатылган сандардын тактык чеги болуп каталык эсептелет.

### 1.1.2. Абсолюттук жана салыштырмалуу каталыктар.

Каталык, абсолюттук жана салыштырмалуу деп эки түргө бөлүнөт.

*Аныктама.* Кандайдыр бир сандын абсолюттук каталыгы деп, анын чын мааниси менен, эсептөөнүн жыйынтыгында алынган жакындатылган маанисинин ортосундагы айырманы айтабыз.

Эгерде  $x$  санынын жакындатылган мааниси  $a$  болсо, анда абсолюттук каталык үчүн туянтма төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$\Delta x = x - a.$$

*Аныктама.* Салыштырмалуу каталык деп, абсолюттук каталыктын сандын жакындатылган маанисине болгон катышын айтабыз.

Демек, салыштырмалуу каталык төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$\delta(x) = \frac{\Delta x}{a}.$$

Тилекке каршы  $x$  чоңдугунун чын мааниси дайыма эле белгилүү болбойт. Ошондуктан, жогорудагы каталык үчүн туюнтмалар практикада пайдаланылбай калат. Эгерде  $x$  чоңдугунун чын мааниси белгисиз болсо, анда  $a$  жакындатылган маани гана бар экендигин эске алып, абсолюттук каталыктын модулуна жогорку жагынан баасы болгон, анын  $\Delta a$  пределдик каталыгын табуу керек, б.а.  $|\Delta x| \leq \Delta a$ . Мындан ары  $a$  жакындатылган санынын абсолюттук каталыгы катары  $\Delta a$  мааниси эсептелет. Бул учурда  $x$  чоңдугунун чын мааниси  $(a - \Delta a, a + \Delta a)$  интервалда жатат, б.а.

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a.$$

Тегеректөөнүн натыйжасында алынган жакындатылган сан үчүн,  $\Delta a$  абсолюттук каталык сандын акыркы разрядындагы бирдин жарымына барабар деп кабыл алынат. Мисалы  $a = 0.824$  мааниси,  $0.82441, 0.82363, 0.82424$  ж.у.с. сандарды тегеректегенден алынат. Бул учурда  $|\Delta x| \leq 0.0005$ , мында  $\Delta a = 0.0005$ . Эгерде компьютерде эсептегенде сандар тегеректелбесе, ал эми машинанын торчосунан ашып кеткен цифралар эсепке алынбаса, анда операцияларды аткаруунун жыйынтыгында мүмкүн болгон максималдуу каталык, тегеректөө учуруна салыштырганда эки эсеге чоң болот.

$a$  чоңдугунун кээ бир жакындатылган маанилеринде абсолюттук каталыкты баалоого мисал келтирели:

$a$	32.6	28	-0.00019	95.00	1700.0003
$\Delta a$	0.05	0.5	0.000005	0.005	0.00005

Мисалы,  $3.1415$  жазуусунда, бул жакындатылган сандын абсолюттук каталыгы  $0.00005$  тен ашып кетпейт. Ал эми  $480$  саны үчүн абсолюттук каталык  $0.5$  тен ашпайт. Эгерде бул сан чоң тактыкка ээ болсо, мисалы абсолюттук каталыгы  $0.05$  тен кичине болсо, анда  $480$  деп жазбастан  $480.0$  деп жазуу керек. Демек,  $48 \cdot 10^2, 48 \cdot 10, 480, 480.0, 480.00$  жакындатылган сандарынын пределдик абсолюттук каталыктарын, тиешелүү  $50, 5, 0.5, 0.05, 0.005$  түзөт.

Салыштырмалуу каталыктын пределдик мааниси – пределдик абсолюттук каталыктын жакындатылган сандын абсолюттук чоңдугуна болгон катышына барабар:

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Мисалы,  $\delta(22.13) = 0.005/22.13 \approx 0.00023$  ( $0.02\%$ ). Каталык ар дайым көбөйүү жагына тегеректелгендиктен,  $\delta(22.13) \approx 0.0003$  болот.

Жогорудагы жакындатылган сандардын каталыктарын баалоо туура болот, эгерде ал сандардын жазылышындагы бардык маанилүү

цифралар ишенимдүү болсо. Эске салсак, *маанилүү цифралар* болуп, ал сандын биринчи нөл эмес цифрасынан баштап калган бардык цифралары эсептелет. Мисалы, 0.082 санындагы маанилүү цифралар 8 жана 2, ал эми 21.07 санынын бардык төрт цифрасы маанилүү. Анын үстүнө, сандын жазылыш формасынын өзгөрүшүндө (мисалы, чекити жылуучу формада жазуу учурунда) ишенимдүү цифралардын саны өзгөрбөш керек, б.а. өзгөртүп жазуулардын барабардыгын сактоо керек. Мисалы,  $6500 = 0.6500 \cdot 10^4$  жана  $0.220 \cdot 10^2 = 22.0$  тең күчтүү жазуулар, ал эми  $6500 = 0.65 \cdot 10^4$  жана  $0.220 \cdot 10^2 = 22$  жазуулары тең күчтүү эмес.

### 1.1.3. Жакындатылган сандардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар.

Жакындатылган сандардын үстүнөн амалдар аткарылган учурда пределдик каталыкты баалоо эрежелерин көрсөтөлү.

Айталы,  $a$  жана  $b$  эки жакындатылган сандары берилсин.

1. Кошуу жана кемитүү. Эки жакындатылган сандардын суммасынын же айырмасынын абсолюттук каталыгы, алардын абсолюттук каталыктарын кошконго барабар, б.а.

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b.$$

2. Көбөйтүү жана бөлүү. Эки жакындатылган санды бири бирине көбөйткөндө же бөлгөндө, алардын салыштырмалуу каталыктары кошулат, б.а.

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b),$$

$$\delta(a/b) = \delta(a) + \delta(b). \quad (1.1)$$

3. Даражага көтөрүү. Жакындатылган санды даражага көтөрүүдө, анын салыштырмалуу каталыгы даража көрсөткүчүнө көбөйтүлөт, б.а.

$$\delta(a^k) = k\delta(a). \quad (1.2)$$

Оң кошулуучулардын суммасынын салыштырмалуу каталыгы, ал кошулуучулардын салыштырмалуу каталыгынын эң чоң жана эң кичине маанилеринин арасында камалган. Чынында, мейли  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $m = \min(\delta a, \delta b)$ ,  $M = \max(\delta a, \delta b)$  болсун. Анда

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{a+b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} = \frac{a\delta a + b\delta b}{a+b} \geq \frac{am + bm}{a+b} = m,$$

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{a+b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} = \frac{a\delta a + b\delta b}{a+b} \leq \frac{aM + bM}{a+b} = M.$$

Практикада каталыкты баалоо үчүн эң чоң  $M$  мааниси алынат.

**Мисал.** Функциянын салыштырмалуу каталыгын тапкыла:

$$y = \sqrt[3]{\frac{a+b}{x^2(x-y)}}.$$

(1.1), (1.2) формулаларын пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\delta y = \frac{1}{3} [\delta(a+b) + 2\delta x + \delta(x-y)] = \frac{1}{3} \left[ \frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} + 2 \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta x}{|x-y|} \right].$$

Салыштырмалуу каталыктын алынган баасы бөлчөктүн бөлүмүндө  $|x-y|$  туюнтманы кармайт. Эгерде  $x$  жана  $y$  бири бирине жакын сандар болсо, б.а.  $x \approx y$  болгондо, чоң каталык алышыбыз түшүнүктүү. Ушул себептен жакын сандарды кемитүү учурун сандык мисалда карайлы. Ал үчүн эки сандын айырмасынын салыштырмалуу каталыгы үчүн туюнтманы төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}.$$

**Мисал.** Айталы,  $a = 1.235$ ,  $b = 1.225$  болсун, анда абсолюттук каталык  $\Delta a = \Delta b = 0.0005$  жана салыштырмалуу каталык  $\delta a \approx \delta b = 0.0005/1.225 \approx 0.0004$  (0.04%) болот. Ал эми айырманын салыштырмалуу каталыгы төмөнкүгө барабар:

$$\delta(a-b) = \frac{0.0005 + 0.0005}{0.01} = 0.1 \text{ (10\%)}.$$

Демек, эки жакын сандарды кемитүүнүн жыйынтыгында тактыкты жоготуп алышыбыз мүмкүн. Ошондуктан, эсептөө алгоритмин уюштурууда жакын сандарды кемитүүдөн кутулуу керек. Мүмкүн болсо, эсептөөнүн кайсы бир этабында тактыкты жоготуп албоо үчүн алгоритмдин түрүн өзгөртүү керек. Жогоруда каралган эрежелерден, жакындатылган сандарды кошууда же кемитүүдө, ал сандар бирдей абсолюттук каталыкка ээ болсо жакшы болоору келип чыгат, б.а. ондук чекиттен кийин бирдей сандагы разрядка ээ болушу керек. Мисалы,  $471.532+6.3=477.8$ ,  $57.16+81.42=138.6$ ,  $39.3-0.027=39.3$ . Мында алынып ташталган разряддарды эсепке алуу менен, жыйынтыгында тактыкты көтөрө албайбыз. Жакындатылган сандарды көбөйтүүдө же бөлүүдө маанилүү цифралардын саны, алардын эң кичинеси боюнча текшиленет.



## 1.2. Эсептөө каталыктары.

### 1.2.1. Каталыктын булактары жана классификациясы.

Компьютерде, маселени эсептеп чыгаруунун кайсы бир этабында, эсептөөнүн жыйынтыгын бузуп көрсөткөн каталык пайда болот. Алынган жыйынтыктын чындыгын баалоо көрсөткүчү болуп, эсептеп чыгаруу иштерин уюштуруунун зор маанилүүлүгү эсептелет.

Маселени чыгаруунун айрым этаптарындагы каталыктын булактарын карайлы.

Жаратылыштын кубулуштарын же берилген процесстерди баяндоо үчүн алынган математикалык модел олуттуу каталыктарга алып келет, эгерде анда каралган маселенин кандайдыр бир маанилүү өзгөчөлүктөрү эске алынбаса. Аны менен бирге математикалык модел бир шарттарда эң жакшы иштейт, ал эми башка шарттарда таптакыр жарамсыз болуп калышы мүмкүн, андыктан анын колдонуу областын туура тандоо керек.

Маселенин баштапкы берилгендери көбүрөөк каталыктын негизги булактары болуп саналат. Математикалык моделдеги каталыктар менен бирге, аларды *жоготулгус каталыктар* деп аташат, себеби аны эсептеп чыгаруучу, маселени чыгарганга чейин да, чыгаруу процессинде да азайт албайт. Ошондуктан, баштапкы берилгендер болжолдуу бирдей тактыкта болуш керек.

Сандык метод дагы каталыктын булагы болуп саналат. Бул, мисалы, интегралды сумма менен алмаштырууда, таблицанда берилгендерди интерполяциялоо ж.у.с. менен байланышкан. Эреже катарында, *сандык методдун каталыгын* жөнгө салууга болот, б.а. теория боюнча кээ бир параметрин (мисалы, интегралдоо кадамын ж.б.) өзгөртүү жолу менен каалагандай мааниге чейин азайтууга болот. Методдун каталыгын, жоготулгус каталыктан бир нече жолу кичине чоңдукка чейин жеткирүүгө болот. Кийинчерээк конкреттүү сандык методдорду анализдөө учурунда методдун каталыгын толук карайбыз.

Компьютердин жардамында эсептеген учурда, машинанын разряддык торчосунун чектелгендиги менен байланышкан, *тегеректегендеги каталык* болбой койбойт. Адаттагыдай тегеректеген учурда (эреже катарында, компьютерлерде ишке ашырылган) максималдуу салыштырмалуу каталык төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\delta_{\max} = 0.5\alpha^{1-k}, \quad (1.3)$$

мында  $\alpha$  – эсептөө системасынын негизи,  $k$  – сандын мантиссасынын разряддарынын саны. Ашыкча разряддар жөн эле алынып ташталган

да, бул каталык эки эсеге көбөйөт. Бир эселүү жана эки эселүү тактыкта IEEE 754 стандартында көрсөтүлгөн сандар үчүн, (1.3) формула боюнча тегеректегендеги максималдуу  $\delta_{\max}$  каталыкты эсептейли. Эки учурда тең  $\alpha = 2$  болгондуктан, бир эселүү тактык үчүн  $k = 24$  жана  $\delta_{\max} \approx 6 \cdot 10^{-8}$ , ал эми эки эселүү тактык үчүн  $k = 53$  жана  $\delta_{\max} \approx 10^{-16}$  болот.

Демек, маселени чыгаруу этабында үч түрдүү каталыктын булактары менен иштөөгө туура келет:

- Жоготулгус каталык;
- Сандык методдун каталыгы;
- Тегеректегендеги каталык.

Ошондой эле, бир эсептөө системанын негизи башка эсептөө системанын негизинин даражасы болбогондуктан, сандарды бир эсептөө системадан башка эсептөө системага которуу дагы каталыктын булагы болуп саналат. Бул жаңы эсептөө системасындагы сан, иррационалдык болуп калышына алып келет.

### 1.2.2. Каталыктарды азайтуу ыкмалары.

Жакын сандарды кемитүү салыштырмалуу каталыктын өсүшүнө алып келе тургандыгы, арифметикалык операциялардын жыйынтыгынын каталыгын караган учурда белгилеп өткөнбүз, андыктан, алгоритмде ушуга окшош ситуациялардан кутулуу керек. Эсептөөнү уюштурганда тактыкты жоготпой, кутулууга боло турган, кээ бир башка учурларын карайлы.

Айталы, төрт разряддуу алты сандын суммасын табуу талап кылынсын:  $S = 0.3682 + 0.4275 + 2.364 + 24.33 + 124.6 + 1125$ . Бул сандардын баарын кошуп, андан кийин алынган жыйынтыкты төрт маанилүү цифрага чейин тегеректейли:  $S = 1277$ . Бирок, компьютерде эсептеген учурда ар бир кошуу амалы аткарылгандан кийин тегеректелет. Шарттуу түрдө торчону төрт разряддуу деп, сандардын эң кичинесинен баштап эң чоңуна карата компьютерде эсептелишине байкоо жүргүзөлү, б.а. алардын жазылуу иретинде:  $0.3682 + 0.4275 = 0.7957$ ,  $0.7957 + 2.364 = 3.159$ ,  $3.159 + 24.33 = 27.49$ ,  $27.49 + 124.6 = 152.1$ ,  $152.1 + 1125 = 1277$ ;  $S_1 = 1277$ , б.а. туура жыйынтык алдык. Эми эсептөө тартибин өзгөртүп жана сандарды акыркысынан баштап биринчисине карата удаалаш кошуп чыгалы:  $1125 + 124.6 = 1249$ ,  $1249 + 24.33 = 1273$ ,  $1273 + 2.364 = 1275$ ,  $1275 + 0.4275 = 1275$ ,  $1275 + 0.3682 =$

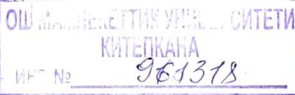
$=1275$ , мында акыркы жыйынтыктын тактыгы азыраак:  $S_2 = 1275$ ,  $S_2 \neq S_1 = S$ .

Жогорудагы эсептөө процессинин анализи көрсөткөндөй, чоң санды кичине санга кошуу жүрбөгөндүктүн кесепетинен болот, себеби дегенде алар разряддык торчонун чегинен чыгып кетип жатат. Мисалы,  $a$  саны  $b$  санынан өтө чоң болгон учурда, алардын суммасы  $a$  ны берет. Ушундай кичине сандар аябай көп болушу мүмкүн, бирок алар жыйынтык мааниге таасир этпейт, себеби  $S_2$  маанисин эсептеген учурдагыдай бирден гана кошулат. Мында сандарды кошууну алардын өсүшүнө жараша жүргүзүү эрежесин сактоо керек. Машиналык арифметикада тегеректегендеги каталыктын айынан амалдарды аткаруу тартиби өтө маанилүү жана алгебра курсунан бизге белгилүү болгон коммутативдик же дистрибутивдик закондору бул жерде ар дайым эле аткарыла бербейт.

Компьютерде маселе чыгарууда алгоритмди жакшыртуу үчүн жана натыйжада каталык төмөндөгүдөй кылып ушул сыяктуу ыкмаларды пайдалануу керек. Мисалы, компьютерде  $(a+x)^2$  маанисин эсептегенде,  $x$  чоңдугу ушундай болуп калышы мүмкүн,  $a+x$  кошулуучуларын кошкондо жыйынтыгында  $a$  ( $x \ll a$  учурда) алынат. Бул учурда бизге  $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a(a+2x) + x^2$  алмаштыруу жардам берет, мында  $a$  га  $x$  эмес  $2x$  кошулат. Эгерде  $x \ll a$  болгон учурда  $(a+x)^2 - a^2$  маанисин эсептеш керек болсо, анда аны жакын чоңдуктарды кемитүүдөн кутулуу максатында,  $2ax + x^2$  көрүнүшкө келтирип алуу ылайыктуу болот.

### 1.2.3. Туруктуулук, коррективдүүлүк, жыйналуучулук жана туруксуз методдордун жана маселелердин мисалдары.

**1. Туруктуулук.** Алгачкы берилгендердин каталыгын карайлы. Алгачкы берилгендердин каталыгы жоготулгус каталык деп аталып жана эсептөөчү аны менен күрөшө албагандыктан, жок дегенде акыркы жыйынтык тактыкка таасир тийгизээри жөнүндө түшүнүгү болуш керек. Албетте, алынган жыйынтык каталык, алгачкы берилгендердин каталыгынын тартибин алышына ишенсек болот. Бирок, дайыма ушундай болобу? деген суроо туулат. Тилекке каршы андай эмес. Кээ бир маселелер так эмес баштапкы берилгендерге карата сезгич келет. Бул сезгичтик туруктуулук деп мүнөздөлөт.



Айталы, маселени чыгаруунун жыйынтыгында, баштапкы  $x$  чоңдугунун мааниси боюнча, izdelүүчү  $y$  чоңдугунун мааниси табылсын. Эгерде берилген чоңдук  $\Delta x$  абсолюттук каталыгына ээ болсо, анда чечим  $\Delta y$  каталыкка ээ болот. Берилген  $x$  параметри боюнча маселе туруктуу деп аталат, эгерде  $y$  чечими андан үзгүлтүксүз көз каранды болсо, б.а. баштапкы  $\Delta x$  чоңдугунун кичине өсүндүсү, izdelүүчү  $\Delta y$  чоңдугунун кичине өсүндүсүнө алып келсе. Башка сөз менен айтканда, берилген чоңдуктагы кичине каталык чечимдин кичине каталыгына туура келсе.

Туруктуулуктун жоктугу, баштапкы берилгендердин кичине эле каталыгынан чечимдин чоң каталыгына же туура эмес чечимге алып келишин билдирет. Ошондуктан, туруктуу эмес маселелер жөнүндө дагы, баштапкы берилгендердин каталыгына карата сезгич келет деп айтабыз.

Туруктуу эмес маселеге мисал келтирели. Төмөнкүдөй  $a$  параметрлүү квадраттык теңдемени карайлы:

$$x^2 - 2x + \text{sign} a = 0,$$

Бул теңдеменин чечими  $a$  маанисинен көз карандылыгы мындай:  $a \geq 0$  болгон учурда  $x_1 = x_2 = 1$ ;  $a < 0$  болгон учурда  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$  болот. Балким,  $a = 0$  болгон учурда,  $a$  ны берүүдөгү кичине терс каталык, акыркыга, б.а. теңдеменин чечиминде кичине эмес каталыкка алып келет.

Айрым учурларда маселе теорияда туруктуу болот, бирок ага карабастан баштапкы берилгендердин каталыгына карата сезгич келет. Изделүүчү чоңдуктун өсүндүсүнүн аздыгын гарантиялаган баштапкы чоңдуктун өсүндүсү бул учурда ошончолук аз экендигинен, эсептөөчү иш алып барган реалдуу кичине өсүндү, чечимде чоң каталыкка алып келет.

Мындай маселенин кызыктуу түшүндүрмөсү Уилкинсондун мисалы деп аталат. Мисалда төмөнкү көрүнүштөгү көп мүчө каралат:

$$P(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots$$

Белгилүү болгондой, көп мүчөнүн тамырлары  $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{20} = 20$  болот.

Айталы, көп мүчөнүн бир коэффициенти кичине каталык менен эсептелсин дейли. Мисалы,  $x^{19}$  нын коэффициентин, б. а.  $-210$  коэффициентин  $10^{-7}$  на чоңойтолу. Экилик тактыгы менен эсептөөнүн жыйынтыгында, тамырдын таптакыр башка маанилерин алабыз.

Ачыктык үчүн үч маанилүү цифрага чейин тегеректеп, бул маанилерди келтирели:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 1.00, & x_{11} = 10.1 + 0.601i, \\
 x_2 = 2.00, & x_{12} = 11.8 - 1.60i, \\
 x_3 = 3.00, & x_{13} = 11.8 + 1.60i, \\
 x_4 = 4.00, & x_{14} = 14.0 - 2.45i, \\
 x_5 = 5.00, & x_{15} = 14.0 + 2.45i, \\
 x_6 = 6.00, & x_{16} = 16.7 - 2.73i, \\
 x_7 = 7.00, & x_{17} = 16.7 + 2.73i, \\
 x_8 = 8.00, & x_{18} = 19.5 - 1.87i, \\
 x_9 = 9.00, & x_{19} = 19.5 + 1.87i, \\
 x_{10} = 10.1 - 0.601i, & x_{20} = 20.8.
 \end{array}$$

Демек,  $x^{19}$  нын коэффициентин  $-210$  дон  $-210 + 10^{-7}$  на өзгөрткөндөн (бул албетте эсептөө практикасында кичине эле өзгөртүү болот) тамырлардын жарымынан көбүрөөгү комплекстик болуп калды. Мындай кубулуштун себеби - маселенин баштапкы берилгендердин каталыгына карата сезгичтиги. Себеби эсептөө жетишээрлик так аткарылган жана тегеректегендеги каталыктар мындай натыйжага алып келбейт эле. Эгерде  $-210$  коэффициентин  $10^{-7}$  га караганда бир кыйла кичине санга өзгөртсөк, анда тамырлардын маанилеринин өзгөрүшү азыраак болот. Мисалы,  $-210$  коэффициентин  $-210 + 10^{-11}$  на чонойткондо, үч цифрага чейин тегеректелген тамырлардын маанилери, берилген көп мүчөнүн тамырлары менен дал келет. Биз карап жаткан маселе туруктуу болгондуктан, болжолдуу ушундай жыйынтыкты күткөн элек.

Дагы бир мисал катары, төмөнкүдөй эки белгисиздүү эки сызыктуу теңдемелер системасы:

$$\begin{cases}
 x + 10y = 11, \\
 100x + 1001y = 1101,
 \end{cases}$$

жалгыз гана  $x = 1, y = 1$  чечимге ээ. Биринчи теңдеменин оң жагына  $0.01$  абсолюттук каталык кетирип ( $11$  санын  $11.01$  ге өзгөртүп):

$$\begin{cases}
 x + 10y = 11.01, \\
 100x + 1001y = 1101,
 \end{cases}$$

жалгыз гана  $x = 11.01$ ,  $y = 0$  чечимге ээ болгон системаны алабыз. Акыркы чечимди баштапкы системанын чечимине жакын деп эч качан айтууга болбойт.

**2. Коррективдүүлүк.** Маселе коррективдүү коюлган деп аталат, эгерде кээ бир класстан баштапкы берилгендердин каалагандай маанилери үчүн, анын чечими баштапкы берилгендер боюнча жалгыз жашап жана туруктуу болсо.

Жогоруда каралган туруктуу эмес маселе, коррективдүү эмес коюлган маселе болуп саналат. Мындай маселелерди чечүү үчүн сандык методдорду пайдалануу максатка ылайыксыз, анткени эсептөөнүн жүрүшүндө пайда болгон тегеректегендеги каталыктар тез өсүп, олуттуу бурмаланган жыйынтыкка келебиз.

Азыркы мезгилде коррективдүү эмес маселелерди чечүү методдору өнүгүп жатат. Булар негизинен регуляризациялоо методдору деген аталышта. Регуляризациялоо методу берилген маселени коррективдүү коюлган маселеге алмаштырууга негизделген. Коррективдүү коюлган маселе кээ бир параметрди кармагандыктан, ал параметр нөлгө умтулгандагы бул маселенин чечими берилген маселенин чечимине өтөт.

**3. Методдордун туруксуздугу.** Кээде коррективдүү коюлган маселени чечүүдө, аны чечүү методу туруксуз болуп калат. Туруксуз алгоритмге мисал карайлы, б. а. интегралды эсептөөнүн сандык методун түзөлү:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Бөлүктөп интегралдап төмөнкүгө ээ болобуз:

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x-1} dx = x e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = \frac{1}{e},$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{x-1} dx = x^2 e^{x-1} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^{x-1} dx = 1 - 2I_1,$$

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - nI_{n-1},$$

б.а.

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}. \quad (1.4)$$

Алынган рекурренттик катыштарды колдонуп, экилик тактыкта эсептейли (төмөндө үч маанилүү цифрага чейин тегеректелген жыйынтык келтирилген):

$$I_1 = 0.368,$$

$$I_2 = 0.264,$$

$$I_3 = 0.207,$$

.....

$$I_{17} = 0.0558,$$

$$I_{18} = -0.00369.$$

Интеграл алдындагы  $x^{18}e^{x-1}$  функциясы бардык  $[0,1]$  интегралдоо кесиндисинде терс эмес болгондуктан,  $I_{18}$  интегралынын мааниси терс болушу мүмкүн эмес эле. Каталыктын булагын изилдейли.  $I_1$  ди эсептеген учурдагы максималдуу абсолюттук каталык:  $0.5 \cdot 2^{-53} \approx 5 \cdot 10^{-17}$ . Бирок, ар бир этапта бул каталык, модулу бирден чоң болгон  $(-2, -3, \dots, -18)$  санга көбөйтүлүп, жыйынтыгында  $18! \approx 6.4 \cdot 10^{15}$  алабыз. Биз, маңызга ээ болбогон жыйынтык алдык. Мында каталыктын жыйналып (чогулуп) калышынын себеби болуп, маселени чечүүнүн алгоритминин туруксуздугу саналат.

Чечүү алгоритми туруксуз болуп калганда,  $n$  дин конкреттүү маанисинде каралып жаткан  $I_n$  интегралын эсептөө үчүн, квадратуралык формулаларды пайдаланууга болот, б.а. анык интегралды жакындатып эсептөөгө ылайыкташтырылган формулаларды, же болбосо (1.4) барабардыгынын башкача көрүнүштө жазылганынан дагы пайдаланса болот:

$$I_n = \frac{1}{n}(1 - I_n). \quad (1.5)$$

Мында,  $0 < I_{n+1} < I_n$  жана  $I_n \rightarrow 0$   $n \rightarrow \infty$  экендигин эске алып,  $I_n$  ди эсептөө үчүн, кээ бир фиксирленген  $n = k$  үчүн  $I_N = 0$  маанисин берип, (1.5) формула боюнча эсептөөнү  $n = N, N-1, \dots, k+1$  үчүн жүргүзүү керек. Ар бир кадамда баштапкы каталык  $n$  жолу кичирейгендиктен, мындай алгоритм туруктуу болуп саналат.

Баштапкы берилгендердин каалагандай маанилеринде сандык чечим жашап жана жалгыз болгон учурда дагы, баштапкы берилгендердин каталыгына карата бул чечим туруктуу болгон учурда дагы сандык алгоритм (же метод) коррективдүү деп аталат.

**4. Жыйналуучулук түшүнүгү.** Эсептөө процессинин тактыгын анализдөөнүн бирден бир манилүү критерийи болуп, сандык методдун жыйналуучулугу эсептелет. Ал маселенин алынуучу сандык чечиминин, так чечимге жакындыгын билдирет.

Итерациялык процесстин жыйналуучулугун карайлы. Бул процесс, кээ бир маселени чечүүдө жана изделүүчү маанини табуу үчүн (мисалы, сызыктуу эмес теңдеменин тамырын ж. б.), удаалаш жакындатуу методдун түзүүдөн турат. Бул итерацияны (процессти) көп жолу кайталоонун жыйынтыгында  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  маанилеринин удаалаштыгын алабыз. Эгерде, бул маанилер  $n$  дин өсүшү менен, тамырдын чын маанисине умтулса б.а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

анда итерация процесси жыйналуучу деп аталат.

### КӨНУГҮҮЛӨР

- 17.2, 192.3, -2.396, -0.0045, -0.00234 сандарын нормалдаштырылган көрүнүштө жазгыла.
- $0.43 \cdot 10^3$ ,  $0.513 \cdot 10^3$ ,  $-0.20 \cdot 10^2$ ,  $0.547 \cdot 10^{-3}$  сандарын чекити туруктуу формада жазгыла.
- 34, 342, -15.0, -0.00147, 0.00147,  $0.345 \cdot 10^{-4}$ ,  $-0.345 \cdot 10^4$ ,  $-0.9871 \cdot 10^2$  жакындатылган сандарынын мүмкүн болгон максималдуу абсолюттук жана салыштырмалуу каталыктарын көрсөткүлө.
- 19.007, 0.00102 жана 0.001020 сандарындагы маанилүү цифраларды көрсөткүлө.
- $\pi$  санын, үч, төрт жана беш маанилүү цифрага чейин тегеректөөнүн жыйынтыгында алынган жакындатылган сандарды, абсолюттук каталыгы менен жазгыла.
- $a \approx 42$ ,  $b \approx 27$ ,  $c \approx 4.7$  болгон учурда, төмөнкү катышта берилген

$$x = \frac{a^2 \sqrt{b}}{c^3 + 2}, \quad y = \frac{\sqrt{a-b}}{a+b^2+c^3} + \frac{a}{b-c}$$

чондуктарынын каталыгын баалагыла.

- Үч маанилүү цифрага чейин тегеректөө менен 303, 0.705, 0.536, 25.2 сандарынын суммасын эсептөөнүн жыйынтыгы, ар бир кошулуучуну кошкондо суммалоонун тартибинен көз карандылыгына ишенүүгө болот. Бул сандарды кандай тартипте кошуу керек?



## 2-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТЕНДЕМЕЛЕР

### 2.1. Маселенин коюлушу.

Математиканын тарыхында, анын идеяларынын жана методдорунун өнүгүшүндө, теңдеме эң маанилүү ролго ээ болуп келген. Аны менен катар, теңдемелер бүгүнкү күндө дагы өтө чоң кызыкчылыкты туудурат, себеби теориялык жана колдонмо маселелерде көп кездешет.

Мектептин алгебра курсунан белгилүү болгондой, сызыктуу жана квадраттык теңдемелердин тамырлары формулалардын жардамы менен туюнтулат. Ал эми үчүнчү жана төртүнчү даражадагы теңдемелердин тамырларын табуу жолун XV кылымда италиялык математиктер дель Ферро, Тартальи, Кардано, Феррарилер тапкан. Бирок, ал формулаларды практикада колдонуу өтө эле ыңгайсыз жана татаал. XIX кылымдын жыйырманчы жылдарында норвегиялык математик Абель, бешинчи жана андан чоң даражадагы жалпы теңдемени радикалда чечүү мүмкүн эместигин далилдеген, б. а. мындай теңдемелердин чечимин, тамырдан чыгаруу жана арифметикалык амалдардын жардамында коэффициенттери аркылуу туюнтууга болбой тургандыгын көрсөткөн. Биз жогоруда айтылгандарга-токтолбостон негизги маселеге өтөлү.

Илим изилдөөнүн түрдүү тармагында

$$F(x) = 0$$

сызыктуу эмес теңдеменин тамырларын табуу маселеси кездешет (мында  $F(x)$  – кээ бир үзгүлтүксүз функция).

*Аныктама.*  $F(x)$  функциясын нөлгө айландырган ар кандай  $c \in [a, b]$ , б.а.  $F(c) = 0$  болсо, анда  $c$  санын  $F(x) = 0$  теңдеменин тамыры деп атайбыз.

Сызыктуу эмес теңдемелерди алгебралык жана трансценденттик деп, эки класска бөлүүгө болот. *Алгебралык теңдеме* деп, алгебралык функцияларды гана (мисалы, бүтүн, рационалдык, иррационалдык) кармаган теңдемени айтабыз. Аны менен катар, көп мүчө дагы бүтүн алгебралык функция болуп саналат. Алгебралык теңдемелердин мисалдары:

$$x^3 - 2x + 1 = 0, \quad x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0, \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-3} = 7.$$

Алгебралык өзгөртүү ыкмасында, каалагандай алгебралык теңдемеден, анын каноникалык формадагы теңдемесин алууга болот:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

мында  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – теңдеменин коэффициенттери, ал эми  $x$  – белгисиз. Мисалы,  $\sqrt{2x^2 - 1} + x = \sqrt{2x^2 + 1} - 1$  алгебралык теңдемени, төмөнкү көрүнүштөгү каноникалык формага келтирүүгө болот:

$$7x^4 + 12x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Бирок, бул учурда кээ бир ашыкча тамырлар пайда болушу мүмкүн.

Эгерде биз алгебралык эмес, трансценденттик теңдемелерди карасак, анда маселе дагы татаалдайт. Башка функцияларды (мисалы, тригонометриялык, көрсөткүчтүү, логарифмдик ж.б.) кармаган теңдемени, *трансценденттик* деп атайбыз. Трансценденттик теңдемелердин мисалдары:

$$x = \cos x, \quad x \sin x - 1 = 0, \quad 2x^2 - 5 = 2^x, \quad \lg(x + 5) = \cos x.$$

Сызыктуу эмес теңдемелерди чыгаруу түз жана итерация методдору болуп, экиге бөлүнөт. *Түз методдор* тамырды кээ бир чектүү катыштар (формулалар) түрүндө жазууга мүмкүндүк берет. Тригонометриялык, логарифмдик, көрсөткүчтүү, ошондой эле, жөнөкөй алгебралык теңдемелерди (сызыктуу, квадраттык) чечүү үчүн мындай методдор, жогоруда белгилеп өткөндөй мектептин алгебра курсунан бери белгилүү.

Бирок, практикада кезиккен теңдемелерди, мындай жөнөкөй методдор менен чыгаруу дайыма эле оңунан чыга бербейт. Аларды чыгаруу үчүн *итерация методдору* пайдаланылат, б.а. удаалаш жакындатуу методдору. Итерация методунун жардамында сызыктуу эмес теңдеменин тамырын табуу алгоритми эки этаптан турат:

- Тамырдын жакындатылган маанисин издеп табуу (баштапкы жакындатууну);
- Берилген тактыкка чейин жакындатылган маанини тактоо.

Айрым методдордо баштапкы жакындатуу эмес, арасында теңдеменин тамырлары жата турган чектер аныкталат.

Баштапкы жакындатуу ар түрдүү ыкма менен табылышы мүмкүн: физикалык ой-жүгүртүүдөн, баштапкы берилгендер башка учурдагы окшош маселени чыгаруудан, графикалык методдун жардамында. Эгерде баштапкы жакындатууга мындай ойлорду жүргүзүү туура келбесе, анда жакын жайгашкан  $a$  жана  $b$  чекиттери табылып, ал чекиттерде  $F(x)$  үзгүлтүксүз функциясы түрдүү белгидеги маанилерди кабыл алышы керек, б.а.  $F(a)F(b) < 0$ . Бул учурда  $a$  жана  $b$  чекиттеринин ортосунда жок дегенде бир чекит табылып, ал чекитте  $F(x) = 0$  барабардыгы орун алат. Баштапкы  $c_0$  жакындатуу катары  $[a, b]$  кесиндисинин ортосун алсак болот, б. а.  $c_0 = (a + b)/2$ .

Итерация процесси баштапкы  $c_0$  жакындатууну удаалаш тактоодон турат. Ар бир мындай кадам итерация деп аталат. Итерациянын жыйынтыгында тамырдым жакындатылган маанилеринин  $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$  удаалаштыгы табылат. Эгерде, бул маанилер  $k$  нын өсүшү менен, тамырдын чын маанисине умтулса б.а.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c,$$

анда итерация процесси жыйналуучу деп аталат.

Биз, мындан ары алгебралык жана трансценденттик теңдемелерди кээ бир итерация методдору менен чечүүнү карайбыз. Практикада кеңири таралган, сызыктуу эмес теңдемелерди чыгаруунун сандык методдору төмөнкүлөр:

- Кесиндини тең экиге бөлүү методу (бисекция методу);
- Хорда методу;
- Ньютондун методу (жанымалар методу);
- Жөнөкөй итерация методу.

## 2.2. Тамырларды ажыратуу.

Айталы,

$$F(x) = 0 \tag{2.1}$$

теңдемеси берилсин, мында  $F(x)$  функциясы  $[a, b]$  аралыгында аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун. Бул теңдеме обочолонгон гана тамырларга ээ дейли, б.а. теңдеменин башка тамырларын кармабаган, ар бир тамырынын жака бели жашасын.

(2.1) теңдеменин жакындатылган чыныгы тамырларын табуу эки этаптан түзүлөт:

1. тамырларды ажыратуу, б.а. (2.1) теңдеменин бирден гана тамырлары жаткан,  $[\alpha, \beta]$  аралыктарын аныктоо;
2. жакындатылган тамырларды тактоо, б.а. аларды берилген тактыкка чейин жеткирүү.

Тамырларды ажыратууну аналитикалык жана графикалык деп, эки ыкмада ишке ашырууга болот. Теңдеменин тамырларын ажыратуунун аналитикалык ыкмасында, математикалык анализ курсунан бизге белгилүү болгон, үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери жөнүндөгү теоремаларды пайдаланабыз.

*1-Теорема (Тамырдын жашашы жөнүндө теорема). Эгерде  $F(x)$  функциясы  $[\alpha, \beta]$  кесиндисинин четки чекиттеринде түрдүү белгидеги маанилерди кабыл алса, б.а.  $F(\alpha)F(\beta) < 0$  болсо, анда*

$F(x) = 0$  теңдеменин жок дегенде бир тамыры бул кесиндиде жатат, б.а.  $F(c) = 0$  орун ала тургандай, жок дегенде бир  $c \in (\alpha, \beta)$  саны табылат.

$c$  тамырынын жалгыздыгы белгилүү болот, эгерде  $F'(x)$  туундусу жашаса жана  $(\alpha, \beta)$  интервалынын ички чекиттеринде турактуу белгисин сактаса.

**2-Теорема** (Тамырдын жалгыздыгы жөнүндө теорема). Эгерде  $F(x)$  функциясы  $[\alpha, \beta]$  кесиндисинин четки чекиттеринде түрдүү белгидеги маанилерди кабыл алса, б.а.  $F(\alpha)F(\beta) < 0$  болсо жана  $F'(x)$  туундусу кесиндинин ички чекиттеринде турактуу белгисин сактаса, анда ал кесиндинин ички чекиттеринде  $F(x) = 0$  теңдеменин жалгыз гана тамыры жашайт.

**Мисал.** Теңдеменин тамырларын ажыраткыла:

$$x = \cos x.$$

Чыгаруу.  $F(x) = x - \cos x$  функциясы  $[0, 1]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз жана анын четки чекиттеринде түрдүү белгиге ээ:  $F(0) = -1 < 0$ ,  $F(1) = 1 - \cos 1 > 0$ . Мындан 1-теорема боюнча берилген теңдеменин жок дегенде бир тамыры жашаары келип чыгат. 1-теорема тамырлардын жалпы санын аныктоого мүмкүндүк бербейт, андыктан кошумча изилдөө жүргүзөлү.  $F(x)$  функциясынын туундусун табалы:  $F'(x) = 1 + \sin x$ . Бул функция  $[0, 1]$  кесиндисинде оң болгондуктан,  $F(x)$  функциясы  $[0, 1]$  кесиндисинде монотондуу өсүүчү жана 2-теорема боюнча жалгыз гана чечимге ээ.

Практикада, берилген теңдеменин тамырларын ажыратуу үчүн, айрым учурларда төмөнкү алгоритмди пайдаланса болот:

1.  $F(x)$  функциясынын туундусун таап жана эгерде

$$F'(x) = 0$$

теңдеменин тамырлары жеңил эле эсептелинсе, анда берилген теңдеменин тамырларын ажыратуу процессин иреттөөгө болот, кийинки пунктка өтөбүз.

2.  $F(x)$  функциясынын белгилеринин таблицасын,  $F'(x) = 0$  теңдеменин тамырларынын чекиттеринде, ошондой эле,  $x = a$  жана  $x = b$  четки чекиттерде түзөбүз.
3. тамыр жаткан аралыктардын узундуктарын бирден ашпагандай кылып кичирейтебиз. Ал үчүн кайрадан  $F(x)$  функциясынын белгилеринин таблицасын түзөбүз.
4. тамыр жаткан аралыктарды бөлүп көрсөтөбүз.

**Мисал.**  $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$  теңдемесинин тамырларын ажыраткыла.

Чыгаруу. Теңдеменин сол жагын  $F(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$  аркылуу белгилеп, анын туундусун табалы:

$$F'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x - 3).$$

Туундунун тамырларын табалы:

$$F'(x) = (x^2 - 1)(4x - 3) = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3/4 = 0.75, \quad x_3 = 1.$$

$F(x)$  функциясынын белгилеринин таблицасын түзөбүз:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0.75$	$1$	$+\infty$
$signF(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Бул таблицадан, берилген теңдеме эки тамырга ээ экендиги көрүнүп турат, б.а.  $c_1 \in (-\infty, -1]$ ,  $c_2 \in [1, +\infty)$ . Тамыр жаткан аралыктардын узундуктарын бирден ашпагандай кылып кичирейтебиз:

$x$	$-2$	$-1$	$1$	$2$
$signF(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Демек,  $c_1 \in [-2, -1]$ ,  $c_2 \in [1, 2]$ .

Көпчүлүк учурларда теңдеменин тамырларын ажыратууну, графикалык ыкмада жүргүзүүгө болот. (2.1) теңдеменин чыныгы тамырлары-бул, абсцисса огу менен  $F(x)$  функциясынын кесилишкен чекиттери десек, анда  $F(x)$  функциясынын графигин тургузуу жетиштүү жана  $Ox$  огундагы бирден гана тамырды кармаган кесиндилерди белгилеп кетүү керек. Эгерде, (2.1) теңдемени ага тең күчтүү болгон

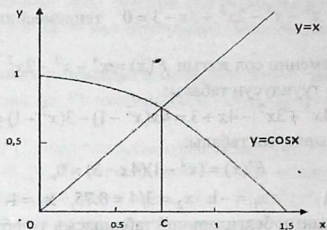
$$F_1(x) = F_2(x)$$

теңдемеге алмаштырсак, анда графиктерди тургузуу дагы жөнөкөйлөйт.

**Мисал.** Графикалык ыкмада теңдеменин тамырларын ажыраткыла:

$$x = \cos x.$$

Чыгаруу. Теңдеменин сол жана оң жагында турган функциялардын графиктерин тургузалы. 2.1-сүрөттөн көрүнүп тургандай, эки функция  $x = c$  чекитинде кесилишет, мында  $0 < c < 1$ . Теңдеменин сол жана оң жагындагы функциялардын кесилишкен чекити болгон  $c$  саны тамыр болот, бирок ал үчүн формула алуу мүмкүн эмес.

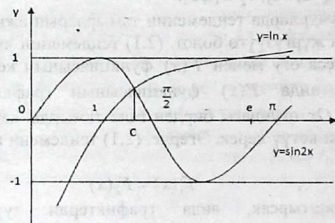


2.1-сүрөт.  $x = \cos x$  тендемесинин графиктеги чыгарылышы

**Мисал.** Графикалык ыкмада тендеменин тамырларын ажыраткыла:

$$\sin 2x - \ln x = 0.$$

Чыгаруу.  $F_1(x) = \sin 2x$  жана  $F_2(x) = \ln x$  функцияларынын ар биринин графиктин тургузабыз. Графиктен көрүнүп турат (2.2-сүрөт) берилген тендеме  $[1, 1.5]$  кесиндисинде жаткан  $c$  тамырына ээ.



2.2-сүрөт.

Күмөндүү учурларда графикалык ыкмада тамырларды ажыратууну, эсептеп бекемдөө зарыл. Текшерүү үчүн компьютердин жардамында  $F(x) = \sin 2x - \ln x$  функциясынын маанилерин  $[1, 1.5]$  кесиндисинин четки чекиттеринде эсептейли:

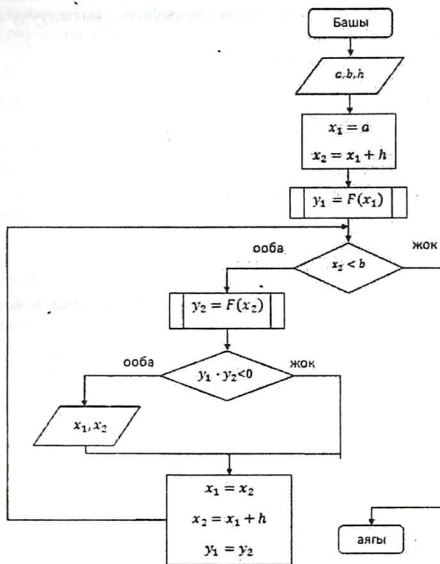
$$F(1) = 0.909297427, \quad F(1.5) = -0.2643450992.$$

Функция, кесиндинин четки чекиттеринде түрдүү белгиге ээ болгондуктан, каалаган учурларда, тамыр жаткан  $[1, 1.5]$  кесиндини дагы тартып болот. Функциянын белгиси 1.3 чекитинде:

$F(1.3) = 0.253138 > 0$  оң болгондуктан, тамыр ажыратылган кесинди катары  $[1.3, 1.5]$  кесиндини эсептейбиз.

• **Теңдеменин тамырларын ажыратуунун алгоритми.**

Айталы,  $F(x) = 0$  теңдеменин  $[a, b]$  кесиндисиндеги бардык тамырларын ажыратуу талап кылынсын, мында  $F(x)$  функциясы  $[a, b]$  кесиндисинде аныкталган, үзгүлтүксүз жана  $F(a)F(b) < 0$  болсун.



2.3-сүрөт.

Тамырларды ажыратуунун алгоритминде (2.3-сүрөт),  $F(x)$  функциясынын маанилерин  $x = a$  чекитинен баштап, жетишээрлик кичине  $h$  кадамы менен, оң жактагы чекиттерде эсептейбиз. Качан гана,  $F(x)$  функциясынын маанилеринин түрдүү белгидеги коңшулаш түгөйлөрү табылса жана бул кесиндиде  $F(x)$  функциясы

монотондуу болсо, анда тиешелүү  $x$  аргументинин мурунку жана кийинки маанилерин, тамыр жаткан кесиндинин четки чекиттери катары кабыл алабыз. Көзүлгөн маселенин чыгарылышынын жыйынтыгы болуп, тамыр жаткан аралыктардын четки  $x_i$  жана  $x_{i+1}$  чекиттерин экранга же печатка чыгаруу эсептелет.

Төмөндө теңдеменин тамырларын ажыратуунун алгоритминин схемасы боюнча  $\cos x - 0.1x = 0$  теңдеменин тамырларын ажыратуунун Turbo Pascal тилинде жазылган жекече программасы келтирилген. Функциянын маанилери функция көрүнүштө камтылуучу программада эсептелинет.

```

program tamyrlardy_agyratuu;
uses crt;
function f(x:real):real;
    begin
        f:=cos(x)-0.1*x;
    end;
var a, b, h, x1, x2, y1, y2:real;
    i, k:integer;
label 1, 2, 3;
begin
    clrscr;
    writeln ('kesindinin a, b chetki chekitterin jana h kadamyn kiir-
gile?');
    readln (a, b, h);
    k:=0;
    x1:=a; x2:=x1+h; y1:=f(x1);
1: if x2>b then goto 3;
    y2:=f(x2);
    if y1*y2>0 then goto 2;
    k:=k+1;
    write (k, '-tamyr', '[', x1:2:1, ',' , x2:2:1, ' ]');
2: x1:=x2; x2:=x1+h; y1:=y2;
    goto 1;
3: end.

```

Бул программаны компьютерге киргизип, ондоп түзөгөндөн кийин (б.а. программаны отладка кылгандан кийин), ctrl+F9 клавишасын бассак

*kesindinin a, b chetki chekitterin jana h kadamyn kiirgile?*



деген экранда суроо пайда болот. Суроо белгисинен кийин  $a$ ,  $b$  жана  $h$  тын тиешелүү  $-10$ ,  $10$ ,  $0.1$  маанилерин берип,  $alt+F5$  клавишасынын жардамында экранда төмөнкү жыйынтыкты алабыз:

1-tamуг [-9.7; -9.6]    2-tamуг [-9.0; -8.9]    3-tamуг [-4.3; -4.2]  
 4-tamуг [-1.8; -1.7]    5-tamуг [1.4; 1.5]    6-tamуг [5.2; 5.3]  
 7-tamуг [7.0; 7.1]

Программаны башка теңдемелердин тамырларын ажыратуу үчүн пайдаланганда, программадагы  $f:=\cos(x)-0.1*x$ ; жолчосундагы ыйгаруу ( $:=$ ) белгисинен кийин жаңы функциянын туюнтмасын жазуу керек.

### 2.3. Кесиндини тең экиге бөлүү методу (бисекция методу).

Артиллерияда атуунун төмөнкүдөй ыкмасы бар: биринчи снаряд бутага жетпей атылат, экинчиси ашыра атылып, бута «ачага» алынды деп айтылат. Кийинки снаряд мурдагы атылган эки снаряддын ортосуна мелженилип, ал жетпей же ашып түшкөнү каралат. Мындай корректировка снаряд бутага дал тийгенге чейин улантыла берет. Бул ыкманын идеясы сызыктуу эмес теңдемелердин тамырларын табуунун бирден-бир жөнөкөй жана натыйжалуу алгоритмдеринин бири болгон, кесиндини тең экиге бөлүү методунун негизине туура келет. Ал төмөндөгүдөн турат..

Айталы, izdelүүчү тамырдын  $x=c$  мааниси жаткан  $[a,b]$  кесиндинин таптык дейли, б.а.  $c \in [a,b]$ . Бул кесиндинин  $c_0$  орто чекитин тамырга баштапкы жакындатуу катары алалы:  $c_0 = (a+b)/2$ . Андан кийин,  $F(x)$  функциясынын маанисин  $[a,c_0]$  жана  $[c_0,b]$  кесиндилеринин четки чекиттеринде изилдейбиз, б.а.  $a, c_0, b$  чекиттеринде. Кесиндинин кайсы жарымынын четки чекиттеринде  $F(x)$  түрдүү белгидеги маанилерди кабыл алса, ошол жарымында izdelүүчү тамыр жатат, ошондуктан аны жаңы  $[a_1,b_1]$  кесинди катары алабыз.  $F(x)$  белгисин өзгөртпөгөн  $[a,b]$  кесиндинин экинчи жарымын кароодон алып таштайбыз. Тамырга биринчи жакындатуу катары, жаңы  $[a_1,b_1]$  кесиндинин ортосун  $c_1 = (a_1+b_1)/2$  чекитин алабыз, ж.у.с.

Демек,  $k$  – чы жакындатуу төмөндөгүдөй эсептелинет:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad (2.2)$$

мында ар бир итерациядан кийин тамыр жаткан кесинди эки эсеге кичирейет, ал эми  $k$  – чы итерациядан кийин ал  $2^k$  жолу кыскарат:

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \quad (2.3)$$

Айталы,  $x_*$  жакындатылган чечимин, берилген жетишээрлик кичине  $\varepsilon > 0$  санына чейинки тактыкта табуу талап кылынсын:

$$|x - x_*| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Тамырга  $k$ -чы жакындатууну жакындатылган чечим катары алып:  $x_* = c_k$ , жана  $x = c$  белгилөөнү эске алуу менен (2.4) барабарсыздыгын төмөнкү көрүнүштө жазалы:

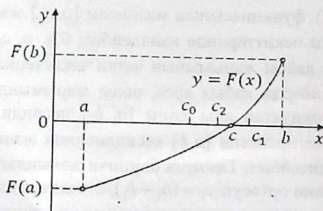
$$|c - c_k| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Бул барабарсыздыгын аткарылышы, (2.2) ден келип чыгат, эгерде

$$b_k - a_k < 2\varepsilon. \quad (2.6)$$

Демек, итерация процессин (2.6) шарты аткарылмайынча улантуу керек.

Кесиндини тең экиге бөлүү методу, 2.4-сүрөттө түшүндүрүлгөн. Айталы, аныктык үчүн  $F(a) < 0$ ,  $F(b) > 0$  болсун. Тамырга баштапкы жакындатуу катары  $c_0 = (a+b)/2$  чекитин алалы. Каралып жаткан учурда  $F(c_0) < 0$  болгондуктан, анда  $c \in [c_0, b]$ , жана ушул гана кесиндини карайбыз, б.а.  $a_1 = c_0$ ,  $b_1 = b$ . Кийинки жакындатуу:  $c_1 = (c_0 + b)/2$ . Аны менен бирге,  $[c_1, b]$  кесиндисин кароодон алып таштайбыз, себеби  $F(c_1) > 0$  жана  $F(b) > 0$ . Демек,  $c \in [c_0, c_1]$ ,  $a_2 = c_0$ ,  $b_2 = c_1$ . Башка жакындатууларды (2.6) шарты аткарылганга чейин, окшош эле табабыз:  $c_2 = (c_0 + c_1)/2$ ,  $c_3 = (c_1 + c_2)/2$  ж.у.с.



2.4-сүрөт. Тең экиге бөлүү методу.

Көпчүлүк башка итерация методдорунан айырмаланып, кесиндини тең экиге бөлүү методу дайыма жыйналат, анын үстүнө алынган чечим, каалагандай мурунтан берилген тактыкты (албетте, компью-

тердин разряддуулугунун чегинде) алат. Бул методду колдонгондо, талап кылынган тактыкка жетүү моментин жакындатып аныктоо, мисалы, эки удаалаш жакындатуунун жакындык шартын пайдалануу зарыл эмес. Анын ордуна, (2.4) барабарсыздыгынын аткарылышын гарантиялаган, (2.6) катышы колдонулат.

Бирок, кесиндини тең экиге бөлүү методунун жыйналуучулугу бир топ эле акырын. Талап кылынган  $\varepsilon$  тактыкка жетүү үчүн  $N$  итерация санын эсептейли. Ал үчүн (2.3) тү пайдаланып, (2.6) шарты кандай  $k$  үчүн аткарылышын тактап, жана  $N$  үчүн алардын эң кичинесин алалы. Анда

$$k > \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}, \quad N = E(\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}) + 1, \quad (2.7)$$

мында  $E(x) - x$  санынын бүтүн бөлүгү.

### Кесиндини тең экиге бөлүү методунун алгоритми.

Айталы, берилген  $\varepsilon$  тактыкта  $[a, b]$  кесиндисинде жаткан (2.1) теңдеменин тамырын табуу талап кылынсын.

Тең экиге бөлүү методу боюнча тамырды тактоо үчүн удаалаш төмөнкү операцияларды аткарабыз:

1. Кесиндини тең экиге бөлөбүз:  $c = (a + b)/2$  – кесиндинин орто чекиги.
2. Четки чекиттеринде функция түрдүү белгиге ээ болгон кесиндинин жарымын, жаңы кесинди катары кабыл алабыз.

Ал үчүн:

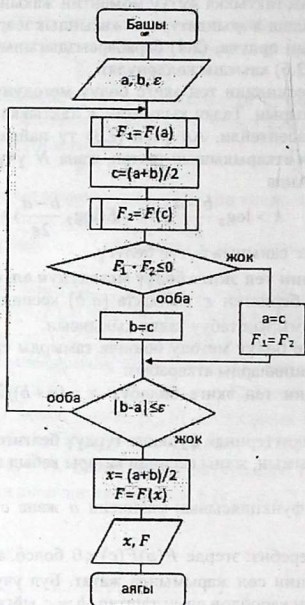
а)  $F(x)$  функциясынын маанисин  $a$  жана  $c$  чекиттеринде эсептейбиз.

б) Текшеребиз: эгерде  $F(a)F(c) < 0$  болсо, анда тамыр  $[a, b]$  кесиндисинин сол жарымында жатат. Бул учурда кесиндинин оң жарымын кароодон алып таштап,  $b := c$  ыйгарабыз.

с) эгерде  $F(a)F(c) > 0$  барабарсыздыгы аткарылбаса, анда тамыр  $[a, b]$  кесиндисинин оң жарым бөлүгүндө жатат. Бул учурда сол жарымын таштап,  $a := c$  ыйгаруу керек. Эки учурда тең биз, мурункудан эки эсеге кичине болгон жаңы  $[a, b]$  кесиндисин алабыз.

3. Процессти, биринчи пункттан баштап,  $[a, b]$  кесиндисинин узундугу берилген тактыктан кичине же барабар болгучанды циклда кайталайбыз, б.а.

$$|b - a| \leq \varepsilon.$$



2.5-сүрөт. Тең экиге бөлүү методунун алгоритми.

Тең экиге бөлүү методу боюнча теңдеменин тамырларын тактоо алгоритминин схемасы 2.5-сүрөттө берилген. Ал алгоритмде, кесиндини кичирейтүү,  $a$  же  $b$  четки чекиттерин  $c$  тамырынын кезектеги маанисине алмаштыруу жолу менен жүргүзүлөт. Бул учурда  $F(a)$  мааниси бир гана жолу эсептелинет, себеби, бизге сол четки чекиттеги  $F(x)$  функциясынын белгиси эле керек, а ал итерация процессинде өзгөрбөйт.

Төмөндө тең экиге бөлүү методунун алгоритми боюнча  $\varepsilon$  тактыкта  $\sin 2x - \ln x = 0$  теңдеменин тамырын табуунун Turbo Pascal тилинде жазылгау жекече программасы келтирилген.

uses crt;

function f(x:real):real;

begin

f:=sin(2\*x)-ln(x);

end;

var a, b, f1, f2, fx, eps, c, x:real;

begin

clrscr;

writeln ('kesindinin a, b chetki chekitterin jana epsilon taktyky kiirgile?');

readln (a, b, eps);

repeat;

f1:=f(a); c:=(a+b)/2; f2:=f(c);

if f1\*f2>0 then begin a:=c; f1:=f2; end else b:=c;

until abs(b-a)<=eps;

x:=(a+b)/2; fx:=f(x);

writeln ('x=',x, 'f(x) =',fx:8:5);

end.

Программада берилген тактык eps аркылуу белгиленген.  $a=1.3$ ,  $b=1.5$ ,  $eps=0.0001$  маанилери үчүн программаны иштетип, төмөнкү жоопту экранда алабыз:

$$x=1.399462890625 \quad f(x)=-0.00009$$

Алынган жыйынтыкты берилген тактыкка чейин тегеректөө керек.

**Мисал.** Тең экиге бөлүү методун  $F(x) \equiv x - \cos x = 0$  теңдемени чыгарууда колдонолу.

Чыгаруу. Төмөнкү таблицада  $[0, 1]$  кесиндисин тең экиге бөлүү менен, улам  $F(a_k)F(b_k) < 0$ , ( $k = 0, 12$ ) шарты текшерилип, улам алынган жаңы кесинди он эки жолу бөлүнгөн, ал эми акыркы мамычадагы  $F(c_k)$  нын мааниси тамыр жаткан аралыктын орто чекитинде гана эсептелинген. Таблицаны MS Excel де тамыр жаткан гана аралыктарды эске алып, жеңил эле алууга болот.

$k$	$a_k$	$b_k$	$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$F(c_k)$
0	0	1	0,5	-0,377582562
1	0,5	1	0,75	0,018311131
2	0,5	0,75	0,625	-0,18596312
3	0,625	0,75	0,6875	-0,085334946
4	0,6875	0,75	0,71875	-0,033879372
5	0,71875	0,75	0,734375	-0,007874725
6	0,724375	0,75	0,7421875	-0,005195712
7	0,734375	0,7421875	0,73828125	-0,00134515
8	0,73828125	0,7421875	0,740234375	0,001923873
9	0,73828125	0,740234375	0,739257813	0,000289009
10	0,73828125	0,739257813	0,738769532	-0,000528158
11	0,738695532	0,739257813	0,739013673	-0,000119596
12	0,739013673	0,739257813		

Бул таблица  $c$  тамырын  $\varepsilon < (1/2)^{12} < 0.00025$  тактыкта аныктайт. Демек, жеткен тактыктан ашып кеткен сандарды алып таштап, изделүүчү  $c$  тамыры (0.73901, 0.73926) интервалда жатат деп айтууга болот.

#### 2.4. Хорда методу.

Айталы,  $F(x)$  функциясы четки чекиттерде түрдүү белгиге ээ болгон  $[a, b]$  кесиндисин таптык дейли. Аныктык үчүн  $F(a) > 0$ ,  $F(b) < 0$  болсун. Бул методдо итерация процесси,  $F(x) = 0$  теңдеменин тамырына жакындатуу катары, абсцисса огу менен хорданын кесилишкен чекиттериндеги  $c_0, c_1, c_2, \dots$  маанилерин алуудан турат.

Алгач,  $AB$  хордасынын теңдемесин табалы:

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Анын абсцисса огу менен кесилишкен чекити үчүн ( $x = c_1, y = 0$ ) теңдеме алабыз:

$$c_1 = a - \frac{b - a}{F(b) - F(a)} F(a). \quad (2.8)$$

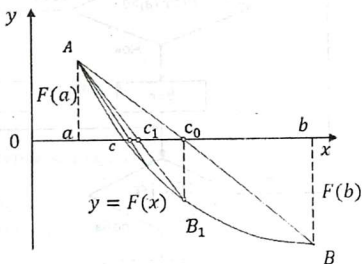
Андан кийин каралган учур үчүн,  $F(a)$  жана  $F(c_1)$  чоңдуктарынын белгилерин салыштырып, тамыр  $(a, c_1)$  интервалында жатат деген жыйынтыкка келебиз, себеби  $F(a)F(c_1) < 0$  шарты орун алат. Ал эми

$[c_1, b]$  кесиндисин карабайбыз. Кийинки итерация, абсцисса огу менен  $AB_1$  хордасынын кесилишкен чекити болгон, жаңы  $c_1$  жакындатууну аныктоодон турат, ж.б.

$c_0, c_1, c_2, \dots$  маанилери төмөнкү формула боюнча удаалаш аныкталат:

$$\begin{cases} c_{k+1} = c_k - \frac{F(c_k)}{F(c_k) - F(a)}(c_k - a), & k = 0, 1, 2, \dots \\ c_0 = b. \end{cases} \quad (2.9)$$

Кесиндини тең экиге бөлүү методунан айырмаланып, хорда методунда (2.6) көрүнүштөгү итерацияны аяктоо шарты колдонулбайт.



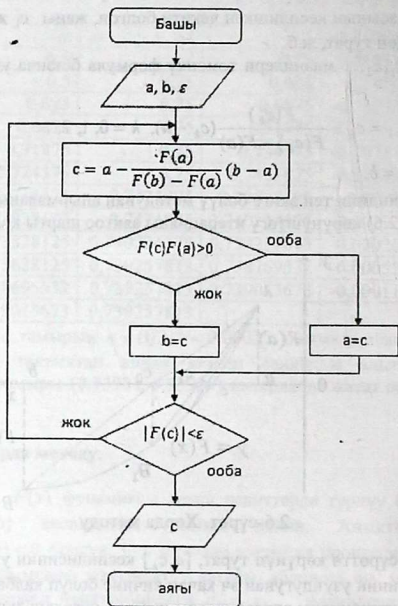
2.6-сүрөт. Хорда методу

2.6-сүрөттө көрүнүп турат,  $[a, c_k]$  кесиндисинин узундугу,  $[a, c]$  кесиндисинин узундугунан эч качан кичине болуп калбайт. Хорда методунда, итерацияны аяктоо шарты катары, удаалаш эки жакындатуунун жакындык шартын пайдалануу керек:

$$|c_{k+1} - c_k| < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Итерациялык процессти, качан  $F(x)$  функциясынын мааниси  $k$  – итерациядан кийин модулу боюнча  $\varepsilon$  дон кичине болгон учурда дагы бүтүрүүгө болот б.а.

$$|F(c_k)| < \varepsilon.$$



2.7-сүрөт. Хорда методунун алгоритми.

### Хорда методунун алгоритми.

Хорда методу боюнча теңдемелердин тамырларын тактоо алгоритминин схемасы 2.7-сүрөттө берилген. Программаны жазганда функциянын маанилери камтылуучу программда эсептелинишин эстен чыгарбоо керек.

Мисал. Хорда методу менен

$$F(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

теңдемелердин оң тамырын тапкыла.



Чыгаруу. Эң алды тамыр жаткан аралыкты ажыратабыз.  $F(1) = -3 < 0$  жана  $F(2) = 1 > 0$  болгондуктан, анда изделүүчү  $c$  тамыры  $[1, 2]$  кесиндиге жатат. Тамыр жаткан кесиндинин узундугу чоң болгондуктан, аны кичирейтип, жыйынтыгында  $[1.8, 1.9]$  кесиндиге ээ болобуз, мында  $F(1.8) = -0.248 < 0$  жана  $F(1.9) = 0.339 > 0$ . Бул кесиндиге хорда методун колдонолу, б.а. (2.9) формуланы:

$$c_1 = 1.9 - \frac{0.339}{0.339 - (-0.248)}(1.9 - 1.8) = 1.842.$$

Бул чекиттеги функциянын маанисин эсептейли:  $F(1.842) = -0.01009 < 0$ . Мындан тамырдын чын мааниси  $[1.842, 1.9]$  кесиндиге жатаары көрүнүп турат. Кайтадан акыркы кесиндиге хорда методун колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$c_2 = 1.9 - \frac{0.339}{0.339 - (-0.01009)}0.058 = 1.8437.$$

Функциянын маанилерин эсептейли:  $F(1.8437) < 0$ ,  $F(1.8438) > 0$ . Тамырдын мааниси катары  $c = 1.84375$  алсак, анда алынган чечимдин каталыгы  $0.00005$  кичине болот.

**Мисал.** Хорда методунда  $F(x) \equiv x - \cos x = 0$  теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу. Төмөндө  $[0.5, 1]$  кесиндисинде хорда методу боюнча алынган, чечимге жакындатуулар келтирилген:

$$c_1 = 0.725481587064,$$

$$c_2 = 0.739903388784,$$

$$c_3 = 0.739036278995,$$

$$c_4 = 0.739088051375,$$

$$c_5 = 0.739090386748,$$

$$c_6 = 0.739084819420,$$

$$c_7 = 0.739085151958,$$

$$c_8 = 0.739085132096,$$

$$c_9 = 0.739085133282,$$

$$c_{10} = 0.739085133211,$$

$$c_{11} = 0.739085133215,$$

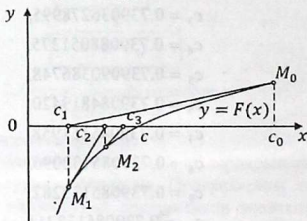
$$c_{12} = 0.739085133215.$$

Мында көрүнүп тургандай чечим, экинчи кадамда  $10^{-4}$  тактыкта, ал эми он биринчи кадамда  $10^{-12}$  тактыкта эсептелинген болот.

- Кесиндини тең экиге бөлүү методу менен хорда методу, кесиндинин четки чекиттеринде функциянын белгисин текшерүү процедурасы боюнча аябай окшош. Бул методдордун экинчиси айрым учурларда итерация процессинин тез жыйналуучулугун бериши мүмкүн. Анын үстүнө, каралган методдордун экөө тең,  $F(x)$  функциясы жөнүндө кошумча маалыматтарды билүүнү талап кылбайт, мисалы, функциянын дифференцирленүүчү болушу талап кылынбайт. Демек,  $F(x)$  функциясынын үзгүлтүксүздүгү менен эле, бул методдорду колдонууда ийгиликке жетишебиз. Сызыктуу эмес теңдемелерди чыгаруунун татаал методдорунда,  $F(x)$  функциясы жөнүндө кошумча маалыматтарды пайдаланууга туура келет, биринчи иретте функциянын дифференцирленүүчү касиетинен. Мындай методдун мисалы болуп, Ньютондун методу саналат.

## 2.5. Ньютондун методу (жанымалар методу).

Ньютондун методу, алдыңкы методдон айырмачылыгы,  $k$ -чы итерацияда хорданын ордуна,  $x = c_{k-1}$  учурда  $y = F(x)$  ийрисине жаныма жүргүзүлөт жана абсцисса огу менен жаныманын кесилишиндеги чекит изделет. Бул учурда,  $F(x) = 0$  теңдеменин тамырын кармаган  $[a, b]$  кесиндисин бербестен эле, кээ бир баштапкы  $x = c_0$  жакында тууну гана табуу жетиштүү, 2.8-сүрөт.



2.8-сүрөт. Жаныма методу.

$M_0(c_0, F(c_0))$  чекити аркылуу  $y = F(x)$  ийрисине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемеси:

$$y - F(c_0) = F'(c_0)(x - c_0)$$

көрүнүштө болот. Мындан,  $x$  ( $y = 0$ ) абсцисса огу менен жаныманын кесилишкен  $c_1$  чекитин, тамырга кийинки жакындатуу катары табыз:

$$c_1 = c_0 - \frac{F(c_0)}{F'(c_0)}.$$

Кийинки жакындашуулар,  $M_1, M_2, \dots$  чекиттеринде жүргүзүлгөн, абсцисса огу менен жаныманын кесилишкен чекиттери катары жогорудагыга окшош табылат.  $k$ -чы жакындатуу үчүн формула төмөнкү көрүнүштө болот:

$$c_k = c_{k-1} - \frac{F(c_{k-1})}{F'(c_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Бул учурда  $F'(c_{k-1})$  нөлгө барабар болбошу зарыл. Итерация процессин аяктоо үчүн (2.10) шартын колдонсок болот.

Мурда каралган методдорго караганда, Ньютондун методунда функциянын жана анын туундусунун дагы мааниси ар бир итерацияда эсептелингендиктен, эсептөө көлөмү көбөйөт. Бирок, ал методдорго караганда жыйналуу ылдамдыгы бир кыйла жогору.

*Теорема. (Ньютондун методунун жыйналуучулугу жөнүндө)*

*Айталы,  $x = c$  чекити  $F(x) = 0$  теңдемесинин тамыры дейли, б.а.  $F(c) = 0$  болсун, ал эми  $F'(c) \neq 0$  жана  $F''(x)$  үзгүлтүксүз болсун. Анда тамырдын  $D$  жака бели жашап, эгерде баштапкы  $c_0$  жакындатуу бул жака белде жатса, анда Ньютондун методу үчүн  $\{c_k\}$  маанилеринин удаалаштыгы  $k \rightarrow \infty$  умтулганда  $c$  га жыйналат.*

Бул учурда, тамырдын  $\varepsilon_k = c - c_k$  каталыгы үчүн төмөнкү катыш орун алат:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}^2} \right| = \left| \frac{F''(c)}{2F'(c)} \right|.$$

Чындыгында, бул ар бир итерацияда каталыкты квадратка көтөрүүнү билдирет, б.а. тамырдын ишенимдүү белгилеринин саны эки эсеге көбөйөт. Эгерде

$$\left| \frac{F''(c)}{2F'(c)} \right| \approx 1,$$

болсо, анда экилик тактыкта эсептөө учурунда мүмкүн болгон эң аз каталыкты алууда,  $|\varepsilon| \leq 0.5$  үчүн беш-алты итерация жетиштүү экенин жеңил эле көрсөтүүгө болот. Албетте, бул учурда каталык теорияда  $2^{-64}$  тартиптеги, экилик тактыгы менен эсептөө учурдагы

тегеректөөдө кеткен максималдык каталыкка барабар болгон, б.а.  $2^{-53}$  чондугунан кичине болгон, чондук болуп калат. Кесиндини тең экиге бөлүү методунда, мынчалык кичине каталыкты алуу үчүн, элүүдөн ашык итерацияны аткаруу талап кылынмак.

Түшүнүктүү болсун үчүн,  $x^2 - 0.25 = 0$  теңдеменин, Ньютондун методунда бир тамырын табалы, мисалы  $x = c = 0.5$ . Берилген теңдеме үчүн,  $F''(c)/(2F'(c)) = 1$  болот.  $c_0 = 1$  болсо, анда  $\varepsilon_0 = -0.5$ . (2.11) формула боюнча  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ды эсептеп, эсептөөнү экилик тактыкта жүргүзүп,  $\varepsilon_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) каталыктын төмөнкүдөй маанилерин алабыз:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -1.25 \cdot 10^{-1}, & \varepsilon_2 &= -1.25 \cdot 10^{-2}, & \varepsilon_3 &= -1.52 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_4 &= -2.35 \cdot 10^{-8}, & \varepsilon_5 &= -5.55 \cdot 10^{-16}, & \varepsilon_6 &= 0. \end{aligned}$$

Демек, арифметиканын чегинде каталык алты итерациядан кийин жоголду.

Ньютондун методун колдонгондо, тамырдын  $D$  жака белинде жатуучу, баштапкы  $c_0$  жакындатууну тандоодо кыйынчылыктарга дуушар болобуз. Бул чекитте функциянын жана анын экинчи туундусунун белгилери дал келиш керек, б.а. кесиндинин четки чекиттеринде  $F(x)F''(x) > 0$  шартын текшерип, баштапкы жакындатуу катары шарт орун алган чекитти алуу керек. Эгерде баштапкы жакындатууну туура эмес тандасак, анда итерация таралуучу болуп калат. Мисалы,  $\arctg x = 0$  теңдеме үчүн ( $x = c = 0$  теңдеменин тамыры) баштапкы  $c_0 = 1.5$  жакындатуу, алты итерациядан кийин төмөнкү каталыктарга алып келет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1.69, & \varepsilon_2 &= -2.32, & \varepsilon_3 &= 5.11, \\ \varepsilon_4 &= -32.3, & \varepsilon_5 &= 1.58 \cdot 10^3, & \varepsilon_6 &= -3.89 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

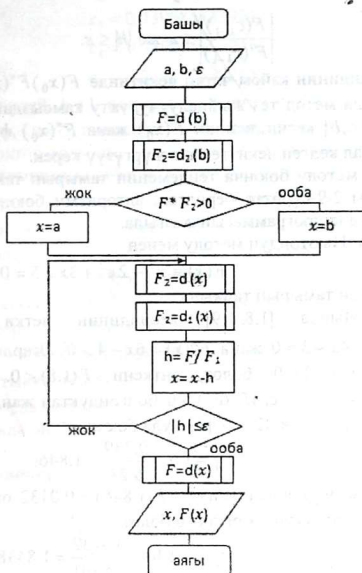
Мында итерация таралуучу болушу анык.

Кээде итерация таралуучу болушун алдын алуу үчүн, аралаш алгоритмдерди пайдалануу максатка ылайыктуу. Анда, адегенде ар дайым жыйналуучу метод колдонулат (мисалы, кесиндини тең экиге бөлүү методу), ал эми бир нече итерациядан кийин, тез жыйналуучу Ньютондун методун колдонсок болот.

#### Ньютондун методунун алгоритми.

Мурда каралган сызыктуу эмес теңдемелерди чечүү методдорунда теңдеменин тамырын издөө үчүн,  $[a, b]$  кесиндисинин түрдүү чекиттеринде функциянын маанисин табууну пайдаланганбыз. Ал

эми Ньютондун методунда тамырды табуу үчүн функциянын туундуларынан пайдаланабыз.



2.9-сүрөт. Ньютондун методунда тамырды тактоо алгоритми.

Айталы,  $\varepsilon$  тактыкта  $[a, b]$  кесиндисинде (2.1) тендеменин тамырын табуу талап кылынсын. Ньютондун методунда тамырда жакындашуу итерациялык процесси (2.11) рекурренттик формуласы боюнча ишке ашырылат, б.а.

$$c_k = c_{k-1} - \frac{F(c_{k-1})}{F'(c_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Процессти төмөнкү шарт аткарылмайынча улантабыз:

$$|c_k - c_{k-1}| \leq \varepsilon.$$

Бул шартты (2.11) формуласы боюнча жөнөкөйлөтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\left| \frac{F(c_{k-1})}{F'(c_{k-1})} \right| \leq \varepsilon \text{ же } |h| \leq \varepsilon.$$

Эгерде кесиндинин кайсы четки чекитинде  $F(x_0)F''(x_0) > 0$  шарт аткарылса, анда метод тез жыйналуучулукту камсыздайт, б.а. биринчи жаныманы  $[a, b]$  кесиндисинин  $F(x_0)$  жана  $F''(x_0)$  функцияларынын белгилери дал келген чекитте гана жүргүзүү керек.

Ньютондун методу боюнча теңдеменин тамырын тактоо алгоритминин схемасы 2.9-сүрөттө берилген, алгоритми боюнча Turbo Pascal тилинде жекече программасын жазгыла.

**Мисал.** Ньютондун методу менен

$$F(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

теңдеменин оң тамырын тапкыла.

Чыгаруу. Мында  $[1.8, 1.9]$  кесиндинин четки чекиттеринде  $F'(x) = 3x^2 - 4x + 3 > 0$  жана  $F''(x) = 6x - 4 > 0$ . Эгерде  $c_0 = 1.8$  болсо, анда  $F(c_0)F''(c_0) < 0$  болот, анткени  $F(1.8) < 0$ . Тескерисинче,  $c_0 = 1.9$  болгондо,  $F(c_0)F''(c_0) > 0$  болгондуктан жаныманы  $c_0$  чекитинде жүргүзүү керек. (2.11) формула боюнча:

$$c_1 = 1.9 - \frac{0.339}{6.23} = 1.846.$$

Бул чекитте функциянын белгиси  $F(1.846) = 0.0132$  оң болгондуктан, кийинки жакындатууну эсептөөгө болот:

$$c_2 = 1.846 - \frac{0.0132}{5.8391} = 1.8438.$$

Демек, табылган маанинин каталыгы 0.0001 ден ашып кетпейт.

**Мисал.** Ньютондун методун колдонуп  $x = \cos x$  теңдемесин чечкиле.

Чыгаруу.  $F(x) = x - \cos x$  функциясын эске алып, ал теңдеме үчүн (2.11) формуланы жазалы:

$$c_k = c_{k-1} - \frac{c_{k-1} - \cos c_{k-1}}{1 + \sin c_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Нөлүнчү жакындатуу катары  $c_0 = 0.5$  тандап, (2.12) формуласы боюнча бир нече жакындатууларды эсептейли:

$$c_1 = 0.755222417106,$$

$$c_2 = 0.739141666150,$$

$$c_3 = 0.739085133921,$$

$$c_4 = 0.739085133215,$$

$$c_5 = 0.739085133215,$$

Көрүнүп тургандай  $k=1$  номеринен баштап эле  $\{c_k\}$  удаалаштыгы кемүүчү болуп,  $x=c$  тамырына жакындашып келди. Итерациялык процесстин токтоп калышы, б.а. төртүнчү кадамдан баштап процесстин токтоп калышынын себеби, эсептөө үтүрдөн кийин он эки цифра менен жүргүзүлгөндүктөн,  $10^{-12}$  тактыкка жеткенден кийин,  $c_k$  менен  $c_{k-1}$  дин ортосундагы айырманы баамдоого мүмкүн болбой калды. Эгерде тактыкты көтөрүү зарылчылыгы болсо, анда үтүрдөн кийин он эки цифрадан көп санды алууга туура келет. Мындай мүмкүнчүлүктү компьютерде аткарып,  $10^{-30}$  тактыкка чейин жеткирүүгө болот.

Демек, берилген теңдеме үчүн эки кадамдан кийин  $10^{-4}$  тактыкка, ал эми төрт кадамдан кийин  $10^{-12}$  тактыкка жеттик. Салыштыруу үчүн  $10^{-4}$  тактыкка, тең экиге бөлүү методунда он бешинчи кадамда гана, ал эми хорда методунда жетинчи кадамда, ал эми  $10^{-12}$  тактыкка хорда методунда он биринчи кадамда гана жетүүгө болот.

## 2.6. Жөнөкөй итерация методу.

Жөнөкөй итерация методун пайдалануу үчүн баштапкы сызыктуу эмес теңдемени, ага тең күчтүү болгон көрүнүштө жазалы:

$$x = f(x). \quad (2.13)$$

Айталы, тамырга  $x = c_0$  баштапкы жакындатуу белгилүү болсун. Бул маанини (2.13) теңдеменин оң жагына коюп, жаңы жакындатуу алабыз

$$c_1 = f(c_0).$$

Ар бир жолу тамырдын жаңы маанисин (2.13) теңдеменин оң жагына коюп отуруп, төмөнкүдөй маанилердин удаалаштыгын алабыз

$$c_k = f(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Эгерде эки удаалаш итерациянын жыйынтыгы жакын болсо, анда итерация процесси токтотулат, б.а. (2.10) барабарсыздыгы аткарылса. Жөнөкөй итерация методунун жыйналуучулугунун жетиштүү шарты кийинки теоремада берилет.

**Теорема.** Айталы,  $x = c$  чекити  $x = f(x)$  теңдемесинин тамыры дейли, б.а.  $c = f(c)$  болсун, ал эми  $|f'(c)| < 1$  жана  $f'(x)$  үзгүлтүксүз болсун. Анда тамырдын  $D$  жака бели жашап, эгерде баштапкы  $c_0$  жакындатуу бул жака белде жатса, анда жөнөкөй итерация методу үчүн  $\{c_k\}$  маанилеринин удаалаштыгы  $k \rightarrow \infty$  умтулганда  $c$  га жыйналат.

Жөнөкөй итерация методу (2.13) теңдеме үчүн каралды. Мындай көрүнүшкө (2.1) жалпы теңдемени дагы алып келүүгө болот. Ал үчүн бир катар теңдеш өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөлү:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \quad \tau F(x) = 0, \\ x &= x - \tau F(x). \end{aligned} \quad (2.13')$$

Мында  $\tau \neq 0$  – кийинчерээк тандалуучу турактуу сан. (2.13') теңдемеси  $f(x) = x - \tau F(x)$  функциясы менен (2.13) теңдемеге эквиваленттүү.  $\tau$  параметринин маанисин тандоонун эсебинен жөнөкөй итерация методунун жыйналуучулугуна жана жыйналуу ылдамдыгын көтөрүүгө жетүүгө болот. Мисалы, эгерде теңдеменин тамырын кармаган кээ бир кесиндиде,  $F'(x)$  туундусу  $m$  жана  $M$  турактуулары менен чектелсе:

$$0 < m < F'(x) < M,$$

анда  $f'(x)$  туундусу үчүн төмөнкү барабарсыздык туура болот:

$$1 - \tau M < f'(x) < 1 - \tau m.$$

$\tau = 2/(M + m)$  параметрин тандап, төмөнкүнү алабыз

$$-\frac{M - m}{M + m} < f'(x) < \frac{M - m}{M + m},$$

б.а. жөнөкөй итерация методунун жыйналуучулугун камсыздаган  $|f'(x)| < 1$  барабарсыздыгын алабыз.

(2.13') теңдемедеги  $\tau$  параметрин итерация номеринен көз каранды болгон өзгөрүлмө катары дагы тандоого болот. Эгерде  $\tau_k = 1/F'(c_{k-1})$  болсо, анда (2.13') теңдеме үчүн жөнөкөй итерация методу төмөнкү көрүнүштү алат

$$c_k = c_{k-1} - \frac{F(c_{k-1})}{F'(c_{k-1})}.$$

Бул катыш (2.11) Ньютондун формуласы менен дал келет. Ошондуктан, Ньютондун методун  $\tau$  өзгөрүлмөсү менен жөнөкөй итерация методунун жекече учуру катары карасак болот.



**Жөнөкөй итерация методунун алгоритми.** Бир катар учурларда теңдеменин тамырын тактоонун ыңгайлуу ыкмасы болуп, удаалаш жакындатуу методу (итерация методу) эсептелет.

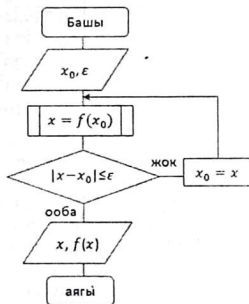
Айталы,  $\varepsilon$  тактыкта  $[a, b]$  кесиндисинде  $F(x) = 0$  теңдеменин тамырын табуу талап кылынсын, мында  $F(x)$  функциясы жана анын биринчи туундусу  $[a, b]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз болсун. Бул методду колдонуу үчүн баштапкы  $F(x) = 0$  теңдеме (2.13) көрүнүшкө келтирилиши керек. Ал эми баштапкы жакындатуу катары  $[a, b]$  кесиндисинин каалаган чекитин тандоого болот. Андан кийин тамырды издөө итерациялык процесси төмөнкү схема боюнча түзүлөт:

$$c_k = f(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Издөө процесси качан гана  $|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon$  шарт орун алганда токтотулат же итерациянын саны берилген  $N$  санынан ашып кетсе гана. Бул методдо,  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  удаалаштыгы изделүүчү тамырга жакындашы үчүн,

$$|f'(x)| < 1$$

жыйналуучулук шарты аткарылышы зарыл.



2.10-сүрөт. Итерация методу боюнча тамырды тактоо алгоритминин схемасы.

2.10-сүрөттө жөнөкөй итерация методу менен (2.13) сызыктуу эмес теңдемени чечүү алгоритми көрсөтүлгөн. Мында  $x_0$  – тамырга баштапкы жакындатуу, андан нары – ар бир итерациядан кийинки

тамырдын мааниси, ал эми  $f(x)$  функциясын эсептөөнү программада камтылуучу программа көрүнүштө жазуу керек.

**Мисал.** Жөнөкөй итерация методун түшүндүрүү үчүн, дагы бир жолу  $x = \cos x$  теңдемесин карайлы. Мында  $f(x)$  функциясынын ролун  $\cos x$  функциясы аткарат. Бул дифференцирленүүчү функция жана анын туундусу  $-\sin x$  ке барабар.  $[0, 1]$  кесиндисинде:  $|f'(x)| = \sin x \leq \sin 1 < 1$ .

Кесиндинин орто чекитин  $c_0 = 0.5$  ти нөлдүк жакындатуу катары алып,  $c_k = \cos c_{k-1}$  формуласы боюнча жуп жана так номерлерин өзүнчө эсептейли:

$k$	$c_{2k}$	$c_{2k+1}$
0	0.500000000000	0.877582561890
1	0.639012494165	0.802685100682
2	0.694778026788	0.768195831282
3	0.719165445942	0.752355759422
4	0.730081063138	0.745120341351
5	0.735006309015	0.741826522643
6	0.737235725442	0.740329651878
7	0.738246238332	0.739649962770
8	0.738704539357	0.739341452281
9	0.738912449332	0.739201444136
10	0.739006779781	0.739137910762
11	0.739049580595	0.739109081421
12	0.739069001204	0.739095999836

Бул таблицадагы жуп номердеги мүчөлөр так номердеги мүчөлөрдөн кичине, ошондуктан, итерациялык процесс бирде өсүп бирде кемип турат. Таблицадан көрүнүп тургандай, номердин өсүшү менен жуп номердеги мүчөлөр өсүүчү, ал эми так номердеги мүчөлөр барган сайын бири-бирине жакындап кемип атат. Эгерде 19-итерацияда эсептөө процессин токтото турган болсок, анда  $c$  тамыры үчүн төмөнкү барабарсыздыкты жаза алабыз:

$$c_{18} = 0.738912449332 < c < c_{19} = 0.739201444136,$$

б. а. итерациялык удаалаштыктын  $c_{18}$  жана  $c_{19}$  мүчөлөрү  $c$  тамырын кеми менен жана ашыгы менен  $\varepsilon < c_{19} - c_{18} < 0.0003$  каталыкта аныктайт.

## 2.7. Алгебралык теңдемелерди чыгаруу методдору жөнүндө.

### 2.7.1. Көп мүчөнүн маанисин эсептөө ыкмалары.

Кээ бир маселелерде төмөнкү көрүнүштөгү көп мүчөнүн маанисин эсептөөгө туура келет:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (2.14)$$

Көп мүчөнүн маанисин эсептөөнү түрдүү ыкмада жүргүзүүгө болот. Эгерде эсептөөнү түз жүргүзсөк, б.а. көп мүчөдөгү ар бир мүчөнүн маанисин таап жана аларды кошсок, анда  $n$  чоң болгон учурда  $n^2 + n/2$  көбөйтүү жана  $n$  кошуу амалдарын аткаруу талап кылынмак. Бул алгоритмде көп мүчөнүн маанисин эсептөө үчүн аткарыла турган арифметикалык амалдардын саны  $N_1 = n^2 + n/2 + n$  болот. Демек, көп сандагы арифметикалык амалдарды аткарууга туура келгендиктен, тегеректөөдө кеткен каталыктын эсебинен тактык жоголот. Андыктан, эсептөө практикасында көп мүчөнүн маанисин эсептегенде, көбөйтүүчүлөрдүн санын эки эсеге азайтууга мүмкүндүк берүүчү, эффективдүү ыкмаларды пайдалануу керек.

Арифметикалык амалдардын санын азайтууга мүмкүндүк берген ыкманы карайлы. Мисалы, берилген көп мүчөдөгү  $x^2, x^3, \dots, x^n$  маанилерин удаалаш эсептеп сактасак,  $n-1$  көбөйтүү амалы талап кылынат. Андан кийин  $a_i x^i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) маанилерин эсептегенде,  $n$  көбөйтүү амалын аткарууга туура келет. Алынган маанилерди кошсок,  $n$  кошуу амалы талап кылынып,  $P_n(x)$  тин маанисин алабыз. Бул учурда арифметикалык амалдардын саны  $N_2 = (2n-1) + n$  болот жана  $N_2 < N_1$  барабарсыздыгы орун алат.

Көбөйтүүчүлөрдүн санын эки эсеге азайтууга мүмкүндүк берүүчү, эффективдүү ыкма катары Горнер схемасынан пайдалансак болот. Мындай ыкма Тянь-юань деген аталышта орто кылымда эле Кытайда белгилүү болгон, андан кийин XIX кылымдын башында Европада, англиялык математик Горнер жана италиялык математик Руффини тарабынан кайтадан ачылган. Бул ыкма төмөндөгүдөн турат.

Безунун теоремасы боюнча, каалагандай  $c_0$  үчүн ушундай бир  $b_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) сандары табылып, төмөнкү барабардык орун алат:

$$\begin{aligned} & a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ & = (x - c_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n, \end{aligned}$$

бирок  $b_n = P_n(c_0)$ . Барабардыктын оң жагындагы көбөйтүүнү аткарып, андан кийин  $x$  тин бирдей даражадагы тиешелүү коэффициенттерин барабарлап, төмөнкүдөй  $n+1$  барабардыктардын жыйындысын алабыз:

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1 + c_0 b_0, b_2 = a_2 + c_0 b_1, \dots, b_n = a_n + c_0 b_{n-1}.$$

Демек,  $n$  көбөйтүү жана  $n$  кошуу амалдарын аткаргандан кийин изделүүчү  $b_n = P_n(c_0)$  жыйынтыкка келебиз, бул учурда  $N_3 = n + n = 2n$  болот жана  $n > 2$  болгондо  $N_3 < N_2 < N_1$  барабарсыздыгы орун алат.

Горнер схемасында жүргүзүлгөн бир типтеги эсептөөлөр, аларды  $b_i = a_i + c_0 b_{i-1}$  формуласы боюнча аныкталган, циклда уюштурууга мүмкүндүк берет, мында  $i = 1, 2, \dots, n, b_0 = a_0$ , ал эми  $P_n(c_0) = b_n$  маанисин акырында печатка чыгаруу керек.

Мындан нары  $b_0, b_1, \dots, b_n$  сандарын Горнер схемасынын коэффициенттери деп атайлы. Колдо эсептегенде төмөнкү таблица көрүнүштө, эсептөө процессинде берилген (2.14) көп мүчөнүн коэффициенттеринин алдына, Горнер схемасынын коэффициенттерин жазуу ыңгайлуу:

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
$c_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	...	$b_{n-1}$	$b_n$

Бул таблицادا Горнер схемасынын коэффициенттери солдон оңго карай удаалаш эсептелинип, ар бир  $b_i$  саны жогору жагында турган  $a_i$  коэффициентине, мурунку  $b_{i-1}$  ге  $c_0$  дү көбөйтүп кошконго барабар, мында  $P_n(c_0) = b_n$ .

**Мисал.**  $x = 3$  болгондо, төмөнкү көп мүчөнүн маанисин эсептейли:

$$P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7.$$

Чыгаруу. Горнер схемасын түзөбүз:

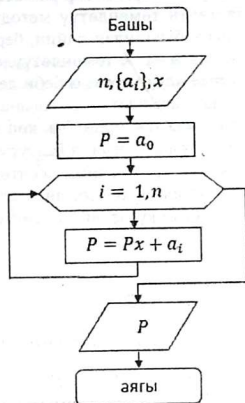
	3	2	-5	7
3	3	9	33	91

Демек,  $P_3(3) = 91$ .

Жалпы учурда берилген (2.14) көп мүчөнү төмөнкү көрүнүштө жазуу максатка ылайыктуу:

$$P_n(x) = (\dots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots + a_{n-1})x + a_n.$$

Бул учурда дагы, мындай ыкманын жардамында көрсөтүлгөн көп мүчөнү, Горнердин схемасы деп атайбыз.



2.11-сүрөт. Горнердин схемасы

Ага тиешелүү көп мүчөнүн маанисин табуу алгоритми 2.11-сүрөттө көрсөтүлгөн. Бул ыкма дагы  $n$  көбөйтүү жана  $n$  кошуу амалдарын аткарууну талап кылат. Көп мүчөлөрдүн маанилерин эсептөө үчүн, Горнердин схемасынан пайдалансак, компьютердеги убакытты дагы экономдойбуз жана тегеректөөдө кеткен каталык азайтылгандыктан, эсептөө тактыгы жогорулайт.

### 2.7.2. Алгебралык теңдемелердин тамырларын табуу.

Жогоруда каралган сызыктуу эмес теңдемелерди чыгаруунун сандык методдору, алгебралык жаңа трансценденттик теңдемелерди чыгарууда бирдей эле колдонулушка ээ. Аны менен бирге, тамырларды ажыратууну жана алардын жакындатылган маанилерин табууну жеңилдеткен, атайын алгебралык теңдемелер үчүн гана жарамдуу, кээ бир ыкмаларды карайлы.

$n$ -тартиптеги чыныгы коэффициенттүү алгебралык теңдемени карайлы:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (2.15)$$

Бул теңдемени чыгаруунун бирден бир ыкмасы болуп, Горнер схемасын пайдаланып, тартипте төмөндөтүү методу саналат. Ал, кандайдыр бир  $x = c$  тамыры табылгандан кийин, берилген теңдемени  $x - c$  га бөлүп, анын тартибин  $n - 1$  ге төмөндөтүүдөн турат. Чынында бул ыкмада тактыкты эсепке алуу керек, себеби дегенде, биринчи тамырдын (көпчүлүк учурда жакындатылып алынат) маанисинин кичине эле каталыгы, кийинки эсептөөлөрдө, б.а. көп мүчөнүн башка тамырларын табууда каталыктардын чогулуп калуусуна алып келет.

Эгерде көп мүчөнүн тамырларын эсептөө, итерациялык методдорду колдонууга багытталган болсо, анда ал теңдеменин тамырларынын жогорку жана төмөнкү чегин көрсөтүүгө болот, мында дагы Горнер схемасы пайдалуу кызмат кылат.

Теорема. Эгерде

$$|x| \geq 1 + \frac{A}{|a_0|}, \quad (2.16)$$

мында  $A$  – саны  $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$  сандарынын эң чоңу, анда

$$|a_0 x^n| > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n|. \quad (2.17)$$

Эгерде  $x$  берилген теңдеменин тамыры болсо, анда төмөнкү барабардык сакталыш керек эле:

$$|a_0 x^n| = |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n|.$$

Ошондуктан, (2.17) барабарсыздыктын негизинде (2.16) шартын канааттандырган  $x$  тин мааниси (2.15) теңдеменин тамыры болбойт.

Демек, (2.15) алгебралык теңдеменин тамырлары төмөнкү барабарсыздыкты канааттандырат:

$$|x| < 1 + \frac{A}{|a_0|}. \quad (2.18)$$

Мында  $R = 1 + \frac{A}{|a_0|}$  саны, алгебралык теңдеменин тамырларынын модулдарынын жогорку чеги болот.

Айталы,  $a_0 > 0$  болсун. Эгерде көп мүчөнүн кийинки бардык коэффициенттери оң болсо, каалагандай  $x > 0$  үчүн  $P_n(x) > 0$  болуп, (2.15) теңдеме оң тамырларга ээ болбойт эле. Демек, (2.15) теңдеменин коэффициенттеринин арасында терс белгидегилери дагы бар. Мейли,  $a_k$  ( $k \geq 1$ ) биринчи терс белгидеги коэффициент дейли. Терс белгидеги коэффициенттердин абсолюттук чоңдугу боюнча эң чоңун  $B$  аркылуу белгилейли. Анда (2.15) алгебралык теңдеменин оң тамырларынын жогорку чеги катары

$$1 + k \sqrt{\frac{B}{a_0}} \quad (2.19)$$

санын алууга болот.

Теңдеменин оң тамырларынын төмөнкү чегин табуу үчүн, андагы  $x$  ти  $1/x$  ке алмаштырып, жаңы теңдеме алабыз:

$$\frac{1}{x^n} (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n) = 0,$$

Бул теңдеменин тамырлары, чоңдугу боюнча баштапкы теңдеменин тамырларына тескери.

Эгерде  $K$  – төмөнкү теңдеменин оң тамырларынын жогорку чеги болсо:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0, \quad (2.20)$$

анда  $1/K$  санын (2.15) теңдеменин оң тамырларынын төмөнкү чеги катары алууга болот.

**Мисал.** Алгебралык теңдеменин тамырларынын чектерин аныктап оң тамырын тапкыла:

$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3 = 0.$$

Чыгаруу. Мында  $a_0 = 1, A = 8$ . (2.18) барабарсыздыктын оң жагы

$R = 1 + \frac{8}{1} = 9$  болгондуктан, теңдеменин бардык тамырлары абсолюттук чоңдугу боюнча 9 дан ашып кетпейт.

Теңдеменин биринчи терс коэффициенти  $a_2 = -5$ , ал эми  $k = 2, B = 7$ , ошондуктан (2.19) баалого ылайык, оң тамырларынын жогорку чеги  $1 + \sqrt{7/1} = 3.65$  ке барабар болот. Тамырлардын төмөнкү чегин табуу үчүн, (2.20) типтеги теңдеме түзөбүз:

$$-3x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

же

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0,$$

мында  $a_0 = 3, k = 2, B = 8$ . Бул теңдеменин оң тамырларынын жогорку чеги  $1 + \sqrt{8/3} = 2.64$  кө барабар, мындан баштапкы теңдеменин оң тамырларынын төмөнкү чеги  $\frac{1}{2.64} = 0.38$  ге барабар экендиги келип чыгат. Демек, теңдеменин оң тамырлары, эгерде алар жашаса  $0.38 < x < 3.65$  барабарсыздыгын канааттандырат.

Терс тамырларынын чегин табуу үчүн берилген теңдемеде  $x$  ти  $-x$  ке алмаштырабыз:

$$-x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0.$$

же

$$x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3 = 0,$$

мында  $a_0 = 1, k = 1, B = 8$ , андыктан бул теңдеменин оң тамырларынын жогорку чеги 9 барабар. Кайтадан (2.20) көрүнүштөгү теңдеме түзөлү:

$$3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0,$$

мында  $a_0 = 3, k = 1, B = 8$ . Анда оң тамырларынын жогорку чеги  $1 + 8/3 = 3.67$ , ал эми оң тамырларынын төмөнкү чеги  $\frac{1}{3.67} = 0.26$ .

Ошентип, баштапкы теңдеменин терс тамырлары  $-9 < x < 0.26$  чегинде жатат.

Теңдеменин оң тамырын табалы.  $P_5(0) = -3, P_5(1) = -4, P_5(2) = 39$  маанилерин эсептеп, көп мүчө  $[1, 2]$  кесиндинин четки чекиттеринде түрдүү белгиге ээ болгондуктан, ал кесиндиде теңдеменин тамыры жатат. Кесиндинин ички чекиттеринде Горнер схемасынан пайдалансак болот. Айталы,  $x = 1.3$  болсун, анда

	1	2	-5	8	-7	-3
1.3	1	3.3	-0.71	7.08	2.20	-0.14

мында  $P_5(1.3) = -0.14 < 0$ . Окшош эле  $x = 1.4$  эсептейли

	1	2	-5	8	-7	-3
1.4	1	3.4	-0.24	7.66	3.72	2.21

мында  $P_5(1.4) = 2.21 > 0$ . Демек, теңдеменин оң тамыры  $[1.3, 1.4]$  кесиндисинде жатат. Бул тамырды Ньютондун методунун жардамында тактайлы. Берилген теңдеме үчүн Ньютондун итерациялык процессинин формуласы төмөнкүдөй жазылат:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{P_5(x_{k-1})}{P_5'(x_{k-1})},$$

мында

$$P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3 = 0,$$

$$P_5'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7.$$

Нөлүнчү жакындатуу катары  $x_0 = 1.35$  тандап, жогорку формула боюнча бир нече жакындатууларды эсептейли:



$$x_1 = 1.309445944458$$

$$x_2 = 1.306827578480,$$

$$x_3 = 1.306817217650,$$

$$x_4 = 1.306817217488,$$

$$x_5 = 1.306817217488.$$

Көрүнүп тургандай биринчи кадамдан баштап эле  $\{x_k\}$  удаалаштыгы кемүүчү болуп,  $x = c$  тамырына жакындашып келди. Чечим экинчи кадамда  $10^{-4}$  тактыкта, ал эми төртүнчү кадамда  $10^{-12}$  тактыкта эсептелинди.

Каталыкты азайтуу үчүн, а дегенде көп мүчөнүн модулу боюнча кичине тамырларын таап жана аларды теңдемеден ошол замат четтетүү керек, аны менен бирге, теңдеменин тартиби төмөндөйт. Ошондуктан, эгерде тамырдын чоңдугу жөнүндө маалымат жок болсо, анда баштапкы жакындатуу катары  $0, \pm 1$  ж.б. сандарын алууга болот.

Компьютерде комплекстик сандар менен дагы иштөө мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз, андыктан, баяндалган Ньютондун методун көп мүчөнүн комплекстик тамырларын табуу үчүн пайдаланса болот. Бул учурда, эгерде баштапкы  $x_0$  жакындатуу катары комплекстик санды алсак, анда кийинки жакындатуу жана тамырдын акыркы мааниси комплекстик болуп калат.

## КӨНУГУҮЛӨР

1. Теңдеменин канча тамыры бар экендигин тактагыла:

$$x^2 e^x = \pi.$$

2. Теңдеменин тамырынын жашашынын жана жалгыздыгын далилдегиле:

$$(x-1)^2 e^x - 7 = 0.$$

3. Кесиндини тең экиге бөлүү методу менен  $10^{-3}$  каталыгы менен төмөнкү теңдемелердин жок дегенде бир тамырын тапкыла:

$$\text{а) } 2e^x = 5x; \quad \text{б) } x^2 \cos 2x = -1.$$

4.  $x^3 - x^2 + 4 = 0$  теңдемесинин терс тамыры жаткан аралыкты тапкыла. Тамырды  $0.1? 0.01? 10^{-5}?$  чейин тең экиге бөлүү методунда канча кадамдан кийин тактоого болот?

5.  $10^{-3}$  каталыгы менен хорда методунда теңдемелердин жок дегенде бир тамырын тапкыла:

а)  $\operatorname{ctgx} - 0.1 = 0$ ; б)  $2x - \lg x - 7 = 0$ .

6. 0.01 чейинки тактыкта  $\sqrt{|x-4|} - x + 1 = 0$  теңдемени тең экиге бөлүү жана хорда методу менен чыгаргыла.

7.  $10^{-3}$  чейинки тактыкта  $x^4 - 2x - 4 = 0$  теңдеменин оң тамырын Ньютондун методу менен тапкыла.

8.  $10^{-3}$  чейинки тактыкта Ньютондун методун колдонуп

а)  $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.5 = 0$ ; б)  $\operatorname{tg}(0.55x + 0.1) = x^2$ .

теңдемелердин жок дегенде бир тамырын тапкыла.

9.  $10^{-3}$  чейинки тактыгы менен жөнөкөй итерация методунун жардамында  $5x - 8 \ln x = 8$ ,  $x^2 = \sin x$  теңдемелеринин жок дегенде бир тамырын тапкыла.

10. Алгебралык теңдеменин тамырларынын чектерин аныктап оң тамырын тапкыла:

$$x^5 - 2x^4 + 15x^2 - 32x + 1 = 0.$$

### 3-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

#### 3.1. Негизги түшүнүктөр.

##### 3.1.1. Сызыктуу теңдемелер.

Көптөгөн теориялык жана практикалык маселелер сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууга келтирилет. Сызыктуу системаларды чыгаруу эсептөө математикасынын өтө маанилүү жана көп кезигүүчү типтүү математикалык маселелерине кирет.

$n$  белгисиздүү  $n$  сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын жазалы:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

мында  $x_i$  - белгисиздер,  $a_{ij}$  - коэффициенттер,  $b_i$  - бош мүчөлөр,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Бул системанын коэффициенттеринин жыйындысын таблица көрүнүшүндө жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$n$  жолчодон жана  $n$  мамычадан турган  $n^2$  элементтен түзүлгөн бул таблица  $n$ - тартыптеги квадраттык матрица деп аталат.

Алынган  $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_n = \beta_n$  сандарын, (3.1) теңдемелер системасынын чечими деп атайбыз, эгерде системанын ар бир теңдемесиндеги тиешелүү белгисиздердин ордуна койгондо, ар бир теңдеме теңдештикке айланса.

Эгерде (3.1) теңдемелер системасынын жок дегенде бир чечими жашаса, анда мындай система *биргелешкен* деп аталат. Эгерде теңдемелер системасынын бир да чечими жашабаса, анда мындай система *биргелешпеген* деп аталат. Биргелешкен теңдемелер системасы жалгыз гана чечимге ээ болсо, анда *анык система* деп аталат, бирден көп чечимге ээ болсо, *аныкталбаган система* деп аталат.

Эгерде сызыктуу теңдемелер системасынын чечиминин көптүктөрү дал келсе, анда аларды *тең күчтүү* сызыктуу теңдемелер системасы деп атайбыз.

Матрица түшүнүгүн колдонуп, (3.1) теңдемелер системасын матрицалык көрүнүштө жазууга болот:

$$Ax = b, \quad (3.2)$$

мында

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

тиешелеш түрдө белгисиздердин жана бош мүчөлөрдүн мамыча матрицалары.

Айрым учурларда атайын көрүнүштөгү матрицаларга ээ болгон теңдемелер системасы алынат. Мындай матрицалардын кээ бир мисалдарын карайлы:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мында,  $C$  – *симметриялуу матрица* (анын элементтери негизги диагоналга салыштырмалуу симметриялуу жайгашкан ( $a_{ij} = a_{ji}$ ));

$S$  – диагоналдын төмөн жагында жайгашкан элементтери нөлгө барабар болгон *жогорку үч бурчтук матрица*;

*K* - чакмактык матрица (анын нөлдөн айырмалуу элементтери өзүнчө группаны (чакмакты) түзөт, мында чакмак катары төмөнкү матрицаларды эсептейбиз

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

*F* - үч диагоналдуу матрица;

*E* - бирдик матрица (диагоналдык матрицанын жекече учуру);

*O* - нөлдүк матрица.

*n* - тартиптеги *A* матрицасынын аныктагычы (же детерминанты) деп,

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}. \quad (3.3)$$

санын айтабыз. Мында  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  индекстери  $1, 2, \dots, n$  номерлеринин бардык мүмкүн болгон  $n!$  орун алмаштыруусунан алынып түзүлөт, ал эми  $k$  - берилген орун алмаштыруудагы орун алмаштыруулардын саны.

$D \neq 0$  шарты, сызыктуу теңдемелер системасынын жалгыз чечиминин жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот. Системанын аныктагычы нөлгө барабар болгон учурда матрица кубулган деп аталат. Бул учурда (3.1) сызыктуу теңдемелер системасы же чечимге ээ эмес же чексиз көп чечимге ээ.

Бул учурлардын баарын төмөнкү система үчүн геометриялык иллюстрация кылууга болот:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Мындагы ар бир теңдеме теңиздикте түз сызыкты берет. Түз сызыктардын кесилишкен чекитинин координатасы (3.4) системанын чечими болот.

Теңиздикте эки түз сызыктын өз ара жайгашышынын мүмкүн болгон үч учурун карайлы:

1) түз сызыктар кесилишет, б.а. (3.4) системанын коэффициенттери пропорционалдуу эмес:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Бул учурда аныктагыч

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

болуп, система жалгыз гана чечимге ээ болот.

2) түз сызыктар параллел болот б.а. (3.4) системанын коэффициенттери төмөнкү шартка баш ийет:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Бул учурда  $D = 0$  болуп, система чечимге ээ болбойт.

3) түз сызыктар дал келет, б.а. (3.4) системанын бардык коэффициенттери пропорционалдуу:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

$D = 0$  болуп, система чексиз көп чечимге ээ.

Практикада, өзгөчө компьютерде эсептегенде санды тегеректегенде же кичи разряддарын алып таштаганда ар дайым эле аныктагычтын нөлгө барабар болгон так маанисин ала албайбыз. (3.1) системанын  $n = 2$  болгон учурунда  $D \approx 0$  үчүн түз сызыктар дээрлик параллель болуп калышат. Системанын коэффициенттеринин өзгөрүүсүнө түз сызыктардын кесилишкен чекиттеринин координаталары өгөрүүчү келет.

Демек, баштапкы берилгендер же эсептөөдө кеткен каталыктар чыгарууда олуттуу каталыктарга алып келет. Мындай теңдемелер системасы *начар шартталган* деп аталат.

Начар шартталган сызыктуу теңдемелер системасы үчүн  $D \approx 0$  шарты зарыл шарт болуп эсептелет, бирок жетиштүү шарт эмес. Мисалы,  $a_{ii} = 0.1$  элементтеринен турган диагоналдык матричасы менен берилген сызыктуу теңдемелер системасы начар шартталган болуп саналбайт.

Келтирилген түшүнүктөр (3.1) сызыктуу теңдемелер системасында  $n = 3$  болгон учурда дагы туура болот. Мында ар бир теңдеме мейкиндикте тегиздикти берет. Эгерде үч тегиздик тең параллел болсо же үч тегиздик бир түз сызыкта кесилишпесе же эки тегиздик параллел болуп, ал эми үчүнчүсү аларды кесип өтсө, анда бул учурларда начар шартталган үч белгисиздүү үч сызыктуу теңдемелер системасын алабыз.  $n > 3$  болгон учурда жөнөкөй геометриялык түшүндүрмө берүүгө болбойт.

### 3.1.2. Жалпы көрүнүштөгү системаны чыгаруу эрежеси.

Айталы, жалпы көрүнүштөгү сызыктуу теңдемелер системасы берилсин:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

мында  $m \leq n$  болсун, б.а. белгисиздердин саны теңдемелердин санынан кичине болбосун. Системанын белгисиздеринин коэффициенттеринен түзүлгөн негизги матрицаны жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бул матрица  $m$  жолчодо жана  $n$  мамычада жайгашкан  $mn$  элементтен турган *тик бурчтуу матрица* деп аталат. Тик бурчтуу матрицага бош мүчөлөр мамычасын толуктап,  $m$  жолчолуу жана  $n+1$  мамычалуу,  $m(n+1)$  элементтен турган жаңы матрицаны карайлы:

$$B = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Бул матрица *кеңейтилген матрица* деп аталып, теңдемелер системасын чечүүдө негизги ролду ойнойт.

*Теорема (Кронекер-Капелли) Теңдемелер системасы биргелешкен болушу үчүн негизги матрица менен кеңейтилген матрицанын рангдарынын барабар болушу зарыл жана жетиштүү.*

Сызыктуу теңдемелер системасынын *рангы* деп, анын матрицасынын рангын айтабыз.

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун жалпы эрежесин көрсөтөлү.

1. Системанын биргелешкен экендигин аныктоо керек, б. а. системанын  $A$  матрицасынын жана  $B$  кеңейтилген матрицаларынын рангдарын аныктайбыз. Кронекер-Капеллинин теоремасы боюнча, эгерде ал матрицалардын рангдары барабар болсо, анда система бир-

гелешкен болот, эгерде дал келбесе, анда система биргелешпеген болот жана мындай системаны чыгаруу мааниге ээ эмес.

2. Айталы, система биргелешкен болсун жана ал системанын рангы:  $\text{rang}(A) = r$  болсун, анын үстүнө  $r \leq n$ , б. а. матрицанын рангы белгисиздердин санынан ашып кетпейт. Ошондуктан, эки учурдун болушу мүмкүн: же  $r = n$ , же  $r < n$ . Биринчи учурда, эгерде системанын рангы белгисиздердин санына барабар болсо, анда система жалгыз гана чечимге ээ болот, б.а. ал анык система болот. Экинчи учурда, качан биргелешкен системанын рангы белгисиздердин санынан кичине болгондо, бул система аныкталбаган болот: ал чексиз көп чечимге ээ.

### 3.1.3. Сызыктуу системаларды чыгаруу методдору жөнүндө.

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу методдору түз жана итерация болуп эки группага бөлүнөт.

а) Түз методдор. Түз методдордо белгисиздерди эсептөө үчүн чектүү катнаштар (формулалар) колдонулат жана чечим мурдатан белгилүү болгон амалдардын саны аткарылгандан кийин гана алынат. Бул методдор салыштырмалуу жөнөкөй жана универсалдуу, б.а. кеңири класстагы сызыктуу системаларды чыгарууга жарамдуу методдор.

Аны менен бирге, түз методдор бир катар кемчиликтерге ээ. Бул методдор матрицанын бардык элементтерин компьютердин эсине сактоону талап кылгандыктан,  $n$  дин чоң манилеринде эстен көп орун ээленет. Ошондой эле, түз методдор көп сандагы нөлдүк элементтери бар матрицаларда (мисалы, чакмактык же үч диагоналдык), дайыма эле матрицанын структурасын эсепке албайт. Нөлдүк элементтер дагы компьютердин эсинен орун ээлейт жана алардын үстүнөн арифметикалык амалдар жүргүзүлөт. Түз методдордун манилүү кемчилиги болуп, эсептөөнүн каалагандай баскычында, алдыңкы баскычта аткарылган амалдардын жыйынтыгы колдонулуп, мындагы ар бир баскычта пайда болгон каталыктар чыгаруу процессинде олуттуу каталыктарга алып келет. Бул өзгөчө чоң системалар үчүн, качан жалпы амалдардын саны тез өскөндө, ошондой эле, начар шартталган системалар үчүн коркунучтуу. Ошондуктан, түз методдор ар дайым тыгыз толтурулган матрицасы менен жана аныктагычы нөлгө жакын эмес болгон өтө чоң эмес системалар үчүн колдонулат.

Кээде сызыктуу системаларды чыгаруунун түз методдорун так методдор деп да аташат, анткени чечим системанын коэффициентте-



ри аркылуу так формула көрүнүшүндө туюнтулат. Бирок, системанын коэффициенттеринин так маанилеринде, эсептөө так аткарылганда гана так чечим алынышы мүмкүн. Практикада компьютерди колдонгондо эсептөө каталыгы менен жүргүзүлөт. Ошондуктан, акыркы жыйынтыкта дагы каталык сөзсүз болот.

Түз методдордун тобуна кирген төмөнкү методдор жөнүндө кыскача маалымат берели:

- Гаусстун методу. Түз методдордун арасынан, Гаусстун методу эң эле көп тараганы. Гаусстун методу компьютерде эсептөө үчүн өтө ыңгайлуу. Бул методду кийинки параграфта кеңири карайбыз.
- Жордандын схемасы. Жордандын схемасы башкы элементи тандоо учурунда, башкы элемент тандалып калган теңдемелердин коэффициенттерин эсепке албайт. Аны, Гаусстун методу менен салыштырганыбызда, өтө эле артыкчылыкка ээ эмес. Мында, тескери жүрүш жеңилдетилгенин белгилеп кетсек болот, себеби, система диагоналдык (үч бурчтук эмес) көрүнүшкө келтирилет. Бул схема тескери матрицаны табууда көп пайдаланылат.
- Квадраттык тамыр методу. Бул методду, качан системанын матрицасы симметриялуу болгон учурларда пайдалансак болот.
- Оптималдуу жоюу методу. Бул метод, оперативдик эске системанын матрицасын ар бир жолчосу боюнча кийирүүдө ыңгайлуу. Бирок, жолчосу боюнча кийирүү кемчиликтерге ээ, мисалы, сырткы түзүлүштөргө тез-тез кайрылуу, башкы элементти тандоо мүмкүн эместиги ж. б.
- Чакмактык метод. Бул методду, качан матрица бүт бойдон оперативдик эске батпаган учурда, чоң системаларды чыгаруу үчүн пайдалансак болот.

**б) Итерация методдору.** Итерация методдору - бул улаалаш жакындатуу методдору. Удаалаш жакындатуу методунда кээ бир жакындатылган чыгарылышты тандоо керек, б.а. баштапкы жакындатууну. Андан кийин, айрым бир алгоритмдин жардамында итерация деп аталган эсептөөнүн биринчи циклы аткарылат. Жыйынтыгында кийинки жакындатылган чыгарылышты алабыз. Итерация, талап кылынган тактыкта жакындатылган чечимди алганга чейин жүргүзүлөт. Итерация методдорун колдонуп сызыктуу системаларды чечүү алгоритмдери түз методдорго салыштырганда дайыма татаал болот. Себеби, алдын-ала эсептөө көлөмүн, б.а. аткарыла турган амалдардын санын аныктоо кыйын.

Бирок, айрым учурларда итерация методдору жогору бааланат. Ал методдор компьютердин эсине системанын матрицасынын бардык элементтерин эмес,  $n$  компоненттүү бир нече векторлорду гана сактоону талап кылат. Кээде матрицанын элементтерин сактабастан эле, аларды керек болгондо эсептөөгө болот. Андыктан, итерация методдорун пайдаланганда, ар бир итерациянын эсептөө тактыгы, алдынкы итерациянын жыйынтыгы менен аныкталып, мурда аткарылган эсептөөлөрдөн көз каранды болбогондуктан, акыркы жыйынтыкта каталык топтолбойт. Итерация методдорунун мындай жакшы жактары, начар шартталган системаларда, ошондой эле тендемелердин саны көп болгон учурда өзгөчө пайдалуу. Түз методдордун жардамында алынган чечимди тактоо үчүн дагы итерация методдору колдонулат. Мындай аралаш алгоритмдер өзгөчө начар шартталган системалар үчүн ар качан эффективдүү.

Итерация методдоруна төмөнкү методдор кирет:

- Жөнөкөй итерация методу;
- Гаусс-Зейделдин методу;
- Релаксация методу;
- Градиенттик метод ж.б.

### 3.1.4. Сзыктуу алгебранын башка маселелери.

Сзыктуу алгебранын сзыктуу тендемелер системасын чечүүдөн башка дагы көптөгөн маселери бар. Мисалы, аныктагычы эсептөө, тескери матрицаны табуу, матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табуу ж. б.

Кээ бир атайын типтеги аныктагычтарды жана тартиби жогору болбогон аныктагычтарды жеңил эле эсептөөгө болот. Мисалы, экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтар тиешелүү түрдө

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11},$$

формулалары менен эсептелинет. Ал эми үч бурчтук матрицанын аныктагычы, анын негизги диагоналында жайгашкан элементтеринин көбөйтүндүсүнө барабар:  $D = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ . Мындан, бирдик матри-

цанын аныктагычы бирге, ал эми нөлдүк матрицанын аныктагычы нөлгө барабар болушун алабыз. б.а.  $\det E = 1, \det O = 0$ .

Жалпы учурда  $n$ -тартиптеги  $D$  аныктагычы (3.3) көрүнүшкө ээ:

$$D = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}.$$

Бул туюнтмадан аныктагычтын мааниси, ар бир кошулуучусу  $n$  элементүү көбөйтүүчүлөрдөн турган  $n!$  кошулуучулардын суммасына барабар болушу келип чыгат. Ошондуктан, атайын ыкмаларды колдонбостон  $n$ -тартиптеги аныктагычты эсептөө үчүн  $(n-1)n!$  көбөйтүү жана  $n!-1$  кошуу амалдарынын аткарылышы талап кылынат, б.а. арифметикалык амалдардын жалпы саны төмөнкүгө барабар болот:

$$N = (n-1)n! + n! - 1 = nn! - 1 \approx nn!. \quad (3.5)$$

Аныктагычтын тартибинин өзгөрүүсүнө жараша  $N$  дин маанисин баалайлы:

$n$	2	3	4	10	20
$N$	3	17	95	$3.6 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{19}$

Амалдарды аткаруу ылдамдыгы менен компьютерде мындай аныктагычтарды эсептөөгө кеткен убакытты аныктасак болот. Айталы, аныктоо үчүн компьютердин орточо аткаруу ылдамдыгы секундасына он миллион амалга барабар болсун дейли. Анда, онунчу тартиптеги аныктагычты эсептөө үчүн 3,6 секунданын тегерегинде, ал эми  $n = 20$  болгондо 150 миң жылдан көп убакыт талап кылынат.

$A^{-1}$  матрицасы  $A$  квадраттык матрицасына карата тескери деп аталат, эгерде алардын көбөйтүндүсү бирдик матрицага барабар болсо:  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ . Сзыыктуу алгебра курсунда, тескери  $A^{-1}$  матрицасынын жалгыз жашашы үчүн  $A$  матрицасынын кубулбаган болушунун (б.а. нөлдөн айрымалуу  $D$  аныктагычы менен) зарыл жана жетиштүү шарты далилденген.

Бул учурда

$$\det A^{-1} = 1/D.$$

Баштапкы  $A$  матрицасын төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$a_{ij}$  элементинин *минору* деп,  $A$  матрицасынан  $i$ -жолчону жана  $j$ -мамычаны сызып салгандан кийинки алынган  $(n-1)$ -тартиптеги аныктагычты айтабыз.

Ал эми  $a_{ij}$  элементинин  $A_{ij}$  алгебралык толуктоочусу деп, эгерде  $i$ -жолчосунун жана  $j$ -мамычасынын  $i+j$  суммасы жуп болсо, анда кошуу белгиси менен, эгерде бул сумма так болсо, анда кемитүү белгиси менен алынган анын минорун айтабыз, б.а.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тескери  $Z = A^{-1}$  матрицасынын ар бир  $z_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) элементтери  $a_{ji}$  ( $a_{ij}$  эмес) элементинин  $A_{ji}$  алгебралык толуктоочусун, баштапкы матрицанын  $D$  аныктагычынын маанисине бөлгөнгө барабар:

$$Z = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}.$$

Мында дагы, жогорудагыдай эле атайын методдорду колдонбостон, тескери матрицаны эсептөө үчүн зарыл болгон амалдардын санын аныктоого болот. Бул сан, ар бири  $(n-1)$ -тартиптеги аныктагыч

болгон  $n^2$  алгебралык толуктоочтор жана алгебралык толуктоочтордун  $D$  аныктагычына болгон  $n^2$  бөлүү эсептелинип, ал амалдардын санынын суммасына барабар. Демек, тескери матрицаны эсептөө үчүн аткарылуучу амалдардын жалпы саны төмөнкүгө барабар болот:

$$N = [(n-1)(n-1)!-1]n^2 + n^2 + nn!-1 = n(n-1)n!-n^2 + n^2 + nn!-1 = \\ = n^2n!-nn!+nn!-1 = n^2n!-1.$$

Алынган  $N$  дин мааниси, тескери матрицаны эсептөөдө эффективдүү методдорду колдонуу зарылдыгын көрсөтүп турат.

### 3.2. Түз методдор.

#### 3.2.1. Крамердин эрежеси.

Сызыктуу тендемелер системасын чыгаруу ыкмаларынын бири болуп, Крамердин эрежеси эсептелет, мында ар бир белгисиз аныктагычтардын катышы көрүнүшүндө көрсөтүлөт. Крамердин эрежесин, (3.1) сызыктуу тендемелер системасында  $n=3$  болгон учурда карайлы:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Анда

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

мында

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Бул эрежени каалагандай тартиптеги сызыктуу тендемелер системасын чечүү үчүн колдонууга аракет кылсак болот. Бирок, системадагы тендемелердин саны көп болгон учурда, өтө көп сандагы арифметикалык амалдарды аткарууга туура келет, себеби,  $n$  белги-

сизди эсептөө үчүн  $n+1$  сандагы аныктагычтардын маанилерин табуу зарыл. Арифметикалык амалдардын санын (3.5) формуласын эске алып баалоого болот. Айталы, бул учурда аныктагычтарга экономдуу методдор колдонулбастан эсептелисин. Анда төмөкүнү алабыз:

$$N = (n+1)(nn!-1) + n.$$

Ошондуктан, Крамердин эрежесин аз гана сандагы теңдемелерден турган системаларды чечүү үчүн колдонууга болот.

Тескери матрицаларды колдонуп сызыктуу теңдемелер системаларын чыгаруу методу дагы бизге белгилүү. Бул учурда (3.1) системасы матрицалык формада (3.2) көрүнүштө жазылат. Анда, матрицалык көрүнүштөгү теңдеменин эки жагына тең сол жактан, тескери  $A^{-1}$  матрицасына көбөйтсөк, (3.1) теңдемелер системасынын чечимин матрицалык формада алабыз:  $x = A^{-1}b$ . Берилген  $A$  матрицасы боюнча тескери матрицаны эсептөө, өтө татаал формулалар боюнча жүргүзүлөт. Демек, тескери матрицаны эсептөөдө экономдуу методдорду колдонбосок,  $n$  дин мааниси чоң болгон учурда, эсептөө көлөмүнүн көптүгүнөн практикада сызыктуу системаларды чыгаруу үчүн, бул ыкма дагы жарабай калат.

Түз методдордун ичинен өтө кеңири тараганы Гаусстун жоюу методу жана анын модификациясы эсептелет. Төмөндө жоюу методунун колдонулушу сызыктуу теңдемелер системасын чечүүдө, анан дагы аныктагычтарды эсептөө үчүн жана тескери матрицаны табууда каралган.

### 3.2.2. Гаусстун методу.

Гаусстун методу системанын матрицасын үч бурчтук көрүнүшкө алып келүүгө негизделген. Ага теңдемелер системасындагы белгисиздерди удаалаш жоюу аркылуу жетишебиз. Адегенде, биринчи теңдеменин жардамында системанын кийинки бардык теңдемелеринен  $x_1$  жоюлат. Андан кийин, экинчи теңдеменин жардамында үчүнчү жана кийинки бардык теңдемелерден  $x_2$  жоюлат. Гаусстун методунун түз жүрүшү деп аталган бул процесс акыркы  $n$ -теңдеменин сол жагында жалгыз гана мүчө,  $x_n$  белгисизи менен калгычанды улантылат, б.а. системанын матрицасы үч бурчтук көрүнүшкө келтирилет.

Гаусстун методунун тескери жүрүшү, изделүүчү белгисиздерди удаалаш эсептөөдөн турат: системадагы акыркы теңдемени чечип, бул теңдемедеги жалгыз гана  $x_n$  белгисизин табабыз. Андан кийин,

бул маанини колдонуп, алдынкы теңдемеден  $x_{n-1}$  белгисизин табабыз ж.у.с. Акырында, биринчи теңдемеден  $x_1$  белгисизи табылат.

Эскөргө кетсек, баяндалган процесстер кубулбаган матрицалуу системалар үчүн гана колдонулат. Тескери учурда (эсептөө так жүргүзүлгөн шартта) Гаусстун методунун жардамы менен система чексиз көп чечимге ээби же бир дагы чечимге ээ эмеспи деген суроого жооп берүүгө болот. Айталы системанын матрицасы кубулбаган болсун дейли.

Гаусстун методунун колдонулушун (3.1) системасында  $n = 3$  болгон учурда карайлы:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Экинчи теңдемеден  $x_1$  белгисизин жоюу үчүн, биринчини  $-a_{31}/a_{11}$  ге көбөйтүп, экинчиге кошобуз. Андан кийин, биринчи теңдемени  $-a_{31}/a_{11}$  ге көбөйтүп жана жыйынтыгын үчүнчү теңдемеге кошуп, мындагы  $x_1$  белгисизин дагы жоёбуз. (3.6) системасына тең күчтүү болгон, төмөнкү көрүнүштөгү теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3, \end{aligned}$$

мында

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i, j = 2, 3, \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

Эми бул системанын үчүнчү теңдемесинен  $x_2$  белгисизин жоюу керек. Ал үчүн, экинчи теңдемени  $-a'_{32}/a'_{22}$  ге көбөйтүп жана жыйынтыгын үчүнчүгө кошобуз. Анда төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 &= b''_3; \end{aligned} \quad (3.7)$$

мында

$$a_{33}'' = a_{33}' - \frac{a_{32}'}{a_{22}'} a_{23}',$$

$$b_3'' = b_3' - \frac{a_{32}'}{a_{22}'} b_2'.$$

Көрүнүп турат, (3.7) системасынын матрицасы үч бурчтук көрүнүшкө ээ. Муну менен Гаусстун методунун түз жүрүшү бүтөт.

Белгисиздерди жоюу процессинде  $a_{11}$ ,  $a_{22}'$  жана башка коэффициенттерге бөлөбүз, андыктан ал коэффициенттер нөлдөн айырмалуу болуш керек. Эгерде бул шарт орун албаса, анда системадагы тиешелүү теңдемелердин ордун алмаштыруу керек. Теңдемелердин ордун алмаштырууну, эсептөө алгоритмдерин компьютерде ишке ашырууда алдын ала караштыруу керек.

Ал эми тескери жүрүш, (3.7) системасындагы үчүнчү теңдемени чечүү менен башталат:

$$x_3 = \frac{b_3''}{a_{33}''}.$$

Бул маанини колдонуп экинчи теңдемеден  $x_2$  белгисизин табууга болот:

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}'} (b_2' - a_{23}' \frac{b_3''}{a_{33}''}).$$

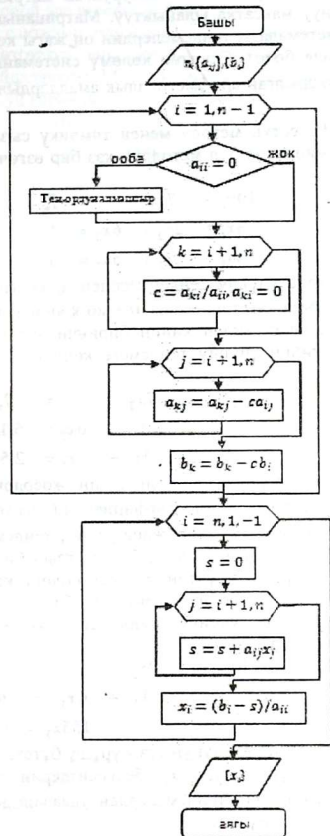
Андан кийин биринчи теңдемеден  $x_1$  табылат:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}'} (b_2' - a_{23}' \frac{b_3''}{a_{33}''}) - a_{13} \frac{b_3''}{a_{33}''}).$$

Жогорудагыга окшош эле, каалагандай сандагы теңдемелери менен сызыктуу системалар үчүн эсептеп чыгаруу алгоритмин түзүүгө болот.

**Гаусстун методунун алгоритми.** Гаусстун методу боюнча (3.1) көрүнүштөгү теңдемелер системасын чыгаруу алгоритми 3.1-сүрөттө берилген. Алгоритм баштапкы берилгендерди кийирүүдөн, эки циклдан жана жыйынтыкты чыгаруудан турат. Биринчи циклда Гаусстун методунун түз жүрүшү, ал эми экинчи циклда тескери жүрүшү аткарылат. Алгоритмде,  $i$  – түз жүрүштөгү белгисиздин номери жана тескери жүрүш учурунда  $i$  – чи теңдемеден аныкталуучу белгисиздин номери;  $k$  – түз жүрүш учурунда  $x_i$  белгисизи жоюла турган теңдеменин номери;  $j$  – түз жүрүш учурундагы мамычанын номери жана тескери жүрүш учурундагы табылган белгисиздин номери.





2.1-сурет. Гауссунун методу.

Гаусстун методун тыгыз толтурулган матрицалуу системалар үчүн пайдалануу максатка ылайыктуу. Матрицанын бардык элементтери жана системадагы теңдемелердин оң жагы компьютердин оперативдик эсинде болот. Эсептөө көлөмү системанын  $n$  тартибинен аныкталып, аткарылган арифметикалык амалдардын саны  $(2/3)n^3$  барабар болот.

**Мисал.** Гаусстун методу менен төмөнкү сызыктуу системаны чечүү алгоритмин жана бул методдун кээ бир өзгөчөлүктөрүн карайлы:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Экинчи жана үчүнчү теңдемелерден  $x_1$  белгисизин жоёлу. Ал үчүн, адегенде биринчи теңдемени 0.3 кө көбөйткөндөн кийин экинчи теңдемеге кошуп, андан кийин биринчи эле теңдемени 0.5 кө көбөйткөндөн кийин үчүнчү теңдемеге кошуп, төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -0.1x_2 + 6x_3 &= 6.1, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5. \end{aligned}$$

Үчүнчү теңдемедеги  $x_2$  белгисизин жоёрдон мурда, экинчи теңдемедеги  $x_2$  белгисизинин коэффициенти (негизги элемент) кичине сан экендигин байкап, экинчи жана үчүнчү теңдемелердин орундарын алмаштырсак жакшы болмок. Бирок, азыр биз арифметикалык амалдарды так жүргүзгөндүктөн, тегеректөөдөгү каталыктар коркунучтуу эмес, андыктан жоюну улантабыз. Экинчи теңдемени 25 кө көбөйткөндөн кийин үчүнчү теңдемеге кошсок, үч бурчтук көрүнүштөгү система алабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -0.1x_2 + 6x_3 &= 6.1, \\ 155x_3 &= 155. \end{aligned}$$

Муну менен Гаусстун методунун түз жүрүшү бүтөт.

Тескери жүрүшү  $x_3, x_2, x_1$  белгисиздерин тиешелүү түрдө үчүнчү, экинчи, биринчи теңдемелерден удаалаш эсептөөдөн турат. Бул эсептөөлөрдү жүргүзөлү:

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1, \quad x_2 = \frac{6x_3 - 6.1}{0.1} = -1, \quad x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0.$$

Демек,  $(0, -1, 1)$  баштапкы системанын чечими экендигине, ал системага коюп оной эле ишенүүгө болот.

Бул чечим сакталып тургудай кылып системанын коэффициенттерин акырын өзгөртүп, аны менен бирге, эсептөө учурунда санды тегеректөөнү пайдаланалы. Мындай шарттардагы тиешелүү системанын жекече учурун карайлы:

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -3x_1 + 2.099x_2 + 6x_3 &= 3.901, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6.\end{aligned}$$

Мында экинчи теңдемедеги  $x_2$  белгисизинин коэффициенти жана барбардыктын оң жагы өзгөртүлгөн. Кайрадан жоюу процессин улантуу үчүн, сандардын үстүнөн болгон арифметикалык амалдарды эсептөөнү, беш разрядка чейин сакталган чекити жылып жүрүүчү формада жүргүзөлү. Жоюунун биринчи кадамынан кийин төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -0.001x_2 + 6x_3 &= 6.001, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5.\end{aligned}$$

Жоюунун кийинки кадамын башкы элемент  $(-0.001)$  кичине болгон учурда жүргүзөлү. Үчүнчү теңдемеден  $x_2$  белгисизин жоюу үчүн экинчи теңдемени 2500 көбөйтүүгө аргасыз болобуз. 6.001 ди 2500 гө көбөйтсөк, 15002.5 санын алабыз, аны беш разрядга чейин тегеректеп 2.5 ке кошобуз. Алынган сан 15006 га чейин тегеректелет. Жыйынтыгында үчүнчү теңдеме төмөнкү көрүнүштө болот:

$$15005x_3 = 15006.$$

Мындан  $x_3 = 15006/15005 = 1.0001$ . Экинчи жана үчүнчү теңдемелерден тиешелүү  $x_2$  жана  $x_1$  белгисиздери табылат:

$$x_2 = \frac{6.001 - 6 \cdot 1.0001}{-0.001} = -0.4, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-0.4)}{10} = 0.42.$$

Эсептөө компьютердеги эсептөө процессине окшош беш разрядка чейин тегеректелип жүргүзүлдү. Анын жыйынтыгында  $(0, -1, 1)$  чечимдин ордуна  $(0.42, -0.4, 1.0001)$  чечими алынды.

Мындай чоң дал келбестик негизги элементтин кичине болгондугу менен түшүндүрлөт. Аны тастыктоо үчүн, үчүнчү теңдемедеги  $x_2$  белгисизин жоюуга чейин, системадагы теңдемелердин орундарын алмаштырабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5, \\ -0.001x_2 + 6x_3 &= 6.001. \end{aligned}$$

Эми үчүнчү теңдемеден (мурдагы экинчи)  $x_2$  белгисизин жоюу үчүн, ага экинчи теңдемеге  $0.0004$  тү көбөйтүп, жыйынтыгын кошобуз (мында негизги элемент  $2.5$  ке барабар). Анда үчүнчү теңдеме төмөнкү көрүнүштү алат:

$$6.002x_3 = 6.002.$$

Мындан  $x_3 = 1$  болуп, системадагы экинчи жана биринчи теңдемелердин жардамында  $x_2, x_1$  эсептелинет:

$$x_2 = \frac{2.5 - 5 \cdot 1}{2.5} = -1, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0.$$

Демек, теңдемелердин орундарын алмаштыруунун жыйынтыгында, б. а. калган, берилген мамычадагы элементтердин ичинен модулу боюнча эң чоңун тандоодо, берилген тактыктагы чечимдин каталыгы жоголду.

Гаусстун методу менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууда кеткен каталыктар жөнүндөгү суроону кененирээк карайлы. Ал үчүн (3.1) системасын матрицалык көрүнүштө жазалы:  $Ax = b$ . Бул системанын чечими  $x = A^{-1}b$  болот. Бирок бул Гаусстун методу боюнча эсептелинген  $x_*$  чечими, бул чечимден компьютердин разряддык торчосунун чектелгендиги менен байланышкан, тегеректөөдөгү каталыктарга айырмаланат.

Алынган чечим так чечимден четтөө деңгээлин мүнөздөөчү эки чоңдук жашайт. Алардын бири – бул маанилердин айырмасына барабар болгон  $\Delta x$  каталыгы, экинчиси – чечимди теңдемеге койгондон кийинки сол жана оң жагынын айырмасына барабар болгон  $r$  коошпостук:

$$\Delta x = x - x_*, \quad r = Ax_* - b.$$

Эгерде бул чоңдуктардын бири нөлгө барабар болсо, анда экинчиси дагы нөлгө барабар болушун көрсөтүүгө болот. Бирок, биринин кичине болгондугунан экинчисинин кичине сан экендиги келип чыкпайт.  $\Delta x \approx 0$  учурда ар дайым  $r \approx 0$  болот, бирок тескерисинче дайыма эле туура боло бербейт. Мисалы, начар шартталган системалар үчүн  $r \approx 0$  учурда, чечимдин каталыгы чоң болушу мүмкүн.

Практикалык эсептөөлөрдө, эгерде система начар шартталган болбосо, чечимдин тактыгын так чечим белгисиз болгондуктан, ката-

лыкты эсептөө мүмкүн эмес, андыктан коошпостуктун жардамында текшерүүгө болот.

### 3.2.3. Аныктагыч жана тескери матрица.

Мурда белгиленгендей, аныктагычты түздөн-түз табуу чоң көлөмдөгү эсептөөлөрдү талап кылат. Аны менен бирге, үч бурчтук матрицанын аныктагычы оңой эле эсептелинет, ал диагоналдык элементтердин көбөйтүндүсүнө барабар.

Матрицаны үч бурчтук көрүнүшкө келтирүү үчүн жоюу методун пайдалануу керек, б.а. Гаусстун методунун түз жүрүшүн. Элементтерди жоюу процессинде аныктагычтын чоңдугу өзгөрбөйт. Жолчолордун же мамычалардын ордун алмаштырууда аныктагычтын белгиси карама-каршысына өзгөрөт. Ошондуктан,  $A$  матрицасын үч бурчтук көрүнүшкө келтиргенден кийин, аныктагычтын мааниси төмөнкү формула боюнча эсептелинет:

$$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Мындагы  $a_{ii}$  диагоналдык элементтери баштапкы матрицадан эмес, өзгөртүлгөн матрицадан алынат.  $k$  аркылуу матрицаны үч бурчтук көрүнүшкө келтирүүдөгү жолчолордун (же мамычалардын) орун алмаштырууларынын саны белгиленген. Жоюу методунун натыйжасында 1000-чи жана андан чоң тартиптеги аныктагычтарды эсептөөгө болот, жана мурда жүргүзүлгөн баалоолорго караганда, эсептөө көлөмү бир кыйла аз.

Гаусстун методу сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууда, чындыгында универсалдуу метод болуп саналат. Биз бул методдун колдонулушун тескери матрицаларды эсептөөдө көрсөтөлү.

Практикада, тескери матрицаны эсептөөнүн бул эң жөнөкөй ыкмасы төмөнкү кадамдардан турат:

1.  $A$  матрицасына карата изделүүчү тескери матрицаны табуу үчүн, ал матрицанын оң жагына  $E$  бирдик матрицаны жазуу керек, б.а.  $(A/E)$  – кеңейтилген матрица алынат.

2.  $(A/E)$  кеңейтилген матрицанын жолчолорунун үстүнөн, Гаусстун методунда өзгөртүп түзүү жолу менен  $A$  матрицасы бирдик матрицага келтирилет.

3. Жогоруда көрсөтүлгөн эсептөө процесстери бүткөндөн кийин б.а. баштапкы  $A$  матрицасынын ордуна бирдик матрица түзүлөт, ал эми оң жагына жазылган  $E$  бирдик матрицанын ордуна  $A^{-1}$  тескери

матрица алынат. Башкача айтканда,  $(A|E)$  кеңейтилген матрицанын ордуна, жыйынтыгында  $(E|A^{-1})$  кеңейтилген матрица алынат.

Бул амалдардын удаалаштыгын төмөнкү мисалда көрсөтөлү.

**Мисал.** Берилген матрицага тескери матрицаны тапкыла:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Чыгаруу. Биринчиден, кеңейтилген матрицаны жазалы:

$$(A|E) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Мында стрелка аркылуу эквиваленттүү системалардын кеңейтилген матрицасына өтүү көрсөтүлгөн.

Экинчиден, төмөндөгү кеңейтилген матрицанын оң жагындагы кашаанын ичиндеги сан, матрицанын тиешелүү жолчосуна көбөйтүлүп, андан кийин ал жолчо төмөнкү (же жогорку) жолчого кошулаары көрсөтүлгөн. Ал эми стрелканын алдындагы сан кадамдын номерин көрсөтүп турат.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(-3)}{(1)} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{(1)} \Rightarrow \\ & \stackrel{(2)}{(2)} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \stackrel{(-1/2)}{(3)} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Эсептөөнүн акыркы кадамы ((3) стрелкасында көрсөтүлгөн) кеңейтилген матрицанын экинчи жолчосун (-2) санына бөлүүдөн турат.

Ошентип, тескери матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

көрүнүштө болот.

Матрицаларды көбөйтүп, тескери матрицанын аныктоосу боюнча, жүргүзүлгөн эсептөөлөрдүн тууралыгын оной эле текшерүүгө болот.

### 3.2.4. Прогонка методу.

Суюлтулган системалардын жекече учуру болгон - үч диагоналдуу матрицасы менен тендемелер системасы үчүн, прогонка методу Гаусстун методунун модификациясы болуп саналат. Мындай системалар кээ бир инженердик маселелерди моделдөөдө, ошондой эле,

дифференциалдык теңдемелер үчүн четтик маселерди сандык чечүүдө алынат.

Теңдемелер системасын төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$\begin{aligned} b_1x_1 + c_1x_2 &= d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2, \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 &= d_3, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1},$$

$$a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n.$$

Бул системанын матрицасынын негизги диагоналында  $b_1, b_2, \dots, b_n$  элементтери, ал эми анын астында -  $a_1, a_2, \dots, a_n$  элементтери, үстүндө -  $c_1, c_2, \dots, c_n$  элементтери турат (бул учурда, дайыма  $b_i$  коэффициенттеринин бардыгы нөлдөн айырмалуу). Матрицанын калган элементтери нөлгө барабар.

Прогонка методу Гауссун методунун түз жүрүшүнө окшош түз прогонка жана тескери жүрүшүнө окшош тескери прогонка болуп, эки этаптан турат. Түз прогонка  $A_i, B_i$  прогонкалык коэффициенттерин эсептөөдөн турат. Ал коэффициенттердин жардамы менен ар бир  $x_i$  белгисизи  $x_{i+1}$  аркылуу төмөнкүдөй туюнтулат:

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.9)$$

(3.8) системасындагы биринчи теңдемедеги  $x_1$  белгисизин,  $x_2$  аркылуу туюнтуп алсак болот:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

Экинчи жактан, (4.2) формуласы боюнча  $i = 1$  болгондо  $x_1 = A_1x_2 + B_1$  болот.  $x_1$  үчүн эки туюнтмадагы коэффициенттерди барабарлап, төмөнкүнү алабыз:

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}. \quad (3.10)$$

(3.8) системасындагы экинчи теңдемедеги  $x_1$  белгисизинин ордуна, анын (3.9) формуласы боюнча  $x_2$  аркылуу туюнтмасын коёлу:

$$a_2(A_1x_2 + B_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2.$$

Мындан,  $x_2$  белгисизин  $x_3$  аркылуу туюнталы:

$$x_2 = \frac{-c_2x_3 + d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2},$$

же

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2, \\ A_2 = -\frac{c_2}{e_2}, \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2}, \quad e_2 = a_2 A_1 + b_2.$$

Жогорудагыга окшош эле, калган коэффициенттер каалагандай  $i$  номери үчүн төмөнкүдөй эсептелинет:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i}, \quad (3.11)$$

мында

$$e_i = a_i A_{i-1} + b_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Тескери прогонка  $x_i$  белгисиздерин удаалаш эсептөөдөн турат. Ал үчүн,  $i = n-1$  болгондо, (3.9) туюнтмасын жана (3.8) системасындагы акыркы теңдемени пайдаланабыз:

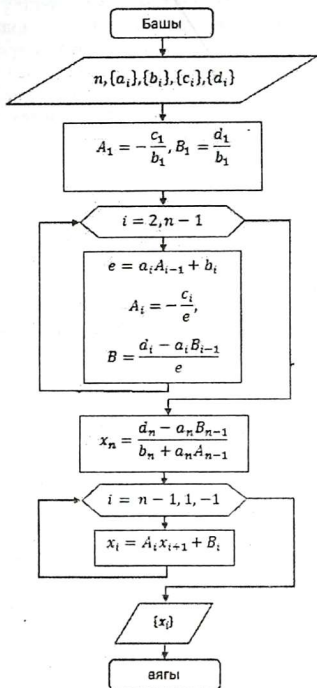
$$x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n,$$

мындан  $x_{n-1}$  белгисизин жоюп,  $x_n$  белгисизин табууга болот:

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}.$$

Андан кийин, (3.9) формуласын жана (3.10); (3.11) формулалары боюнча мурда эсептелинген коэффициенттерди пайдаланып, бардык  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$  белгисиздерин удаалаш эсептейбиз. Прогонка методу менен (3.8) сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу алгоритми 3.2-сүрөттө көрсөтүлгөн.





3.2-сүрөт. Прогонка методунун алгоритми.

### 3.3. Итерация методдору.

#### 3.3.1. Чечимди тактоо.

Түз методдордун жардамы менен, чектүү сандагы разряддуу компьютерде чекити жылып жүрүүчү сандардын үстүнөн болгон амалдарды аткарууда тегеректөө жүргүзүлгөндүктөн, алынган чечим, ар дайым каталыкты кармайт. Айрым учурларда олуттуу каталыктарга дуушар болобуз, андыктан, аны азайтуу ыкмасын табуу зарыл. Түз методдун жардамы менен алынган чечимди тактоого мүмкүн болгон методдордун бирин карайлы.

Матрицалык формада берилген

$$Ax = b \quad (3.12)$$

сызыктуу теңдемелер системасынын чечимин табуу керек болсун.

Айталы, чечимге баштапкы же нөлдүк жакындатуу деп аталган, айрым бир түз методдун жардамы менен  $x^{(0)}$  жакындатылган чечими (б.а.  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ ) белгисиздеринин жакындатылган маанилери) эсептелинген болсун. Бул чечимди, (3.12) системанын сол жагына коюп,  $b$  дан айырмалуу болгон,  $b^{(0)}$  мамыча оң бөлүгүн алабыз:

$$Ax^{(0)} = b^{(0)} \quad (3.13)$$

Белгилөө кийирели:  $\Delta x^{(0)}$  – алынган чечимдин каталыгы, ал эми  $r^{(0)}$  – коошпостук болсун, б.а.

$$\Delta x^{(0)} = x - x^{(0)}, \quad r^{(0)} = Ax^{(0)} - b = b^{(0)} - b. \quad (3.14)$$

Бул белгилөөлөрдү эске алып, (3.13) барабардыктан (3.12) кемитип, төмөнкүнү алабыз:

$$A\Delta x^{(0)} = -r^{(0)}.$$

Бул системаны чыгарып,  $x^{(0)}$  жакындатылган чечимине түзөтүү катарында пайдаланылуучу  $\Delta x^{(0)}$  каталыгынын маанисин тапсак, анда жаңы  $x^{(1)}$  жакындатылган чечим (же кийинки жакындатуу) эсептелинет:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}.$$

Ушундай эле ыкма менен чечимге жаңы  $\Delta x^{(1)}$  түзөтүүнү жана кийинки  $x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)}$  жакындатууну табууга болот, ж.у.с. Бул процесс  $\Delta x^{(k)}$  каталыктын (түзөтүүнүн) кезектеги мааниси жетишээрлик кичине болгонго чейин улантылат, башкача айтканда кезектеги  $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$  белгисиздеринин жакындатылган

маанилери, мурунку  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$  маанилеринен аз эле айырма болгонго чейин улантыла берет.

Каралган, чечимди тактоо процесси, чынында сызыктуу тендемелер системасын чыгаруунун итерациялык методу болуп саналат. Бул экономдуу алгоритмдерди түзүүгө мүмкүндүк берет. Мисалы, Гаусстун методун колдонгонубузда, түз жүрүш этабында эсептөө көлөмү кыскарат.

Итерациялык методдун жардамы менен, сызыктуу тендемелер системасын чыгаруу, төмөнкүгө алынып келет. Алгач баштапкы берилгендер кийирилет, мисалы, тендеменин коэффициенттери жана мүмкүн болгон каталыктын мааниси. Аны менен бирге, белгисиздердин баштапкы жакындатылган маанилерин берүү керек. Алар компьютерге кийирилет же кандайдыр бир ыкма менен эсептелинет. Андан кийин циклдик эсептөө процесси уюштурулат, мында ар бир цикл бир итерация катары саналат, б.а. мурунку  $x^{(k-1)}$  жакындатуудан, кийинки  $x^{(k)}$  жакындашууга өтүү. Эгерде, итерациянын саны өскөн сайын жакындатылган чечим так чечимге умтулса:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x,$$

анда итерациялык метод жыйналуучу деп аталат.

Практикада жыйналуучулукка жана талап кылган тактыкка жетүү үчүн ар дайым жакындатып аныктайбыз. Эки удаалаш итерацияда  $x$  тин аз гана өзгөрүшү учурунда, б.а.  $x^{(k)}$  белгисизи  $x^{(k-1)}$  белгисизинен аз гана айырмаланган учурда процесс токтотулуп, акыркы итерацияда алынган белгисиздердин маанилери чыгарылат. Эки удаалаш итерацияда  $x$  тин аз гана өзгөрүшүн аныктоого түрдүүчө жакындоого болот. Мисалы, эгерде мүмкүн болгон каталык  $\varepsilon > 0$  берилген болсо, анда итерациялык процесстин бүтүшүнүн критерийи катары, төмөнкү үч барабарсыздыктын биринин аткарылышын эсептөөгө болот:

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})^2} < \varepsilon, \quad (3.15)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon, \quad (3.16)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon, \quad |x_i| \gg 1. \quad (3.17)$$

Мында, биринчи учурда,  $x^{(k)}$  жана  $x^{(k-1)}$  векторлорунун  $\varepsilon$  го айырмаланышын, алардын айырмасынын модулу аз гана маанисинде, экинчи учурда – векторлордун бардык тиешелүү компоненттеринин айырмасынын аз гана маанисинде, үчүнчү учурда – компоненттердин салыштырмалуу айырмасынын аз гана маанисинде түшүнөбүз.

Алгоритмде жыйналуучулуктун болбоо учурун алдын ала караштырып, итерациялык процесстин токтотулушу жөнүндө маалыматты печатка чыгаруу керек, тескери учурда процесс улантыла берет.

### 3.3.2. Жөнөкөй итерация методу.

Сызыктуу теңдемелер системасында белгисиздердин саны көп болгон учурда, так чечимди берүүчү Гаусстун методунун схемасы өтө татаал болуп калат. Мындай учурда системанын тамырларын табуу үчүн кээде жакындатылган сандык методдорду колдонуу ыңгайлуу. Жөнөкөй итерация методу теңдемелердин ар түрдүү көрүнүштөгү системаларын сандык чечүүдө кеңири пайдаланылат.

Баштапкы (3.1) сызыктуу теңдемелер системасы берилсин:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Айталы,  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  диагоналдык элементтери нөлдөн айырмалуу болсун, тескери учурда теңдемелердин орундарын алмаштырууга болот. Системадагы биринчи, экинчи ж.у.с.  $n$ -теңдемелерден, тиешелүү  $x_1, x_2, \dots, x_n$  белгисиздерин туюнтуп, эквиваленттүү системага ээ болобуз:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\dots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}. \end{aligned}$$

мында  $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ ; ал эми  $i \neq j$  болгондо  $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$  жана  $i = j$  болгондо  $\alpha_{ij} = 0$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Матрицаларды кийирип

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

алынган теңдемелер системасын матрицалык көрүнүштө жазалы:

$$x = Bx + \beta, \quad (3.18)$$

Бул система жөнөкөй итерация методун түзүүдө негизги кызматты аткарат.

Кээ бир  $x^{(0)}$  баштапкы жакындатууну тандап жана аны (3.18) системанын оң жагына коёлу:

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + \beta.$$

$x^{(0)}$  системанын чечими болбогондуктан (3.18) системанын сол жагында, жалпы учурда  $x^{(0)}$  баштапкы жакындатуудан айырмалуу болгон, айрым бир  $x^{(1)}$  мамычасы алынат. Алынган  $x^{(1)}$  мамычаны, чечимге биринчи (же кийинки) жакындатуу катарында карайбыз. Бул процессти улантып отуруп, белгилүү болгон  $k$ -чы жакындатуу боюнча,  $(k+1)$ -чи жакындатууну табууга болот:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Бул итерациялык процессти жөнөкөй итерация методу деп атайбыз. Итерациялык процесс эки удаалаш итерациядагы маанилер жакын болмоюнча улантыла берет. Жөнөкөй итерация методунун жыйналуучулугунун жетиштүү шарты төмөнкү теоремада берилген.

**Теорема.** *Айталы,  $\det A \neq 0$ . Жөнөкөй итерация методу жыйналуучу болот, качан гана  $B$  матрицасынын бардык өздүк маанилери модулу боюнча бирден кичине болсо.*

**Мисал.** Төмөнкү теңдемелер системасын жөнөкөй итерация методунун жардамы менен чыгаргыла:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Бул теңдемелер системасынын чечими  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  болоорун жеңил эле текшерүүгө болот.

Чыгаруу. Системадагы  $x_1, x_2$  жана  $x_3$  белгисиздерин, тиешелүү биринчи, экинчи жана үчүнчү теңдемеден туюнталы:

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases}$$

Баштапкы жакындатуу катары бош мүчөлөр мамычасын алалы, б.а.  $x_1^{(0)} = 1.2$ ,  $x_2^{(0)} = 1.3$ ,  $x_3^{(0)} = 1.4$  маанилерин алып, белгисиздердин жаңы жакындатууларын табалы:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.3 - 0.1 \cdot 1.4 = 0.93, \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.1 \cdot 1.4 = 0.92, \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.3 = 0.9. \end{cases}$$

Кийинки жакындатуу окшош эле эсептелинет:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0.92 - 0.1 \cdot 0.9 = 1.018, \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.93 - 0.1 \cdot 0.9 = 1.024, \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.93 - 0.2 \cdot 0.92 = 1.03. \end{cases}$$

Буга чейинки жана кийинки жакындатууларды эсептөөнүн жыйынтыгы, төртүнчү белгиге чейинки тактыкта төмөнкү таблицага жайгаштырылган:

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	1.3000	1.4000
1	0.9300	0.9200	0.9000
2	1.0180	1.0240	1.0300
3	0.9946	0.9934	0.9916
4	1.0015	1.0019	1.0024
5	0.9996	0.9995	0.9993
6	1.0001	1.0002	1.0002
7	1.0000	1.0000	0.9999
8	1.0000	1.0000	1.0000

Эскерте кетсек, жөнөкөй итерация методун колдонгондо баштапкы же нөлдүк жакындатуу катары бош мүчөлөр мамычасын алуу шарт эмес. Себеби итерация процессинин жыйналуучулугу  $B$  матрицасынын касиетинен көз каранды болгондуктан, эгерде бул процесс кандайдыр бир баштапкы жакындатуу учурунда жыйналуучу болсо, анда каалагандай башка баштапкы жакындатууну тандоо учурунда дагы сөзсүз жыйналуучу болот.

### 3.3.3. Гаусс – Зейделдин методу.

Программалоого жеңилдиги жана жөнөкөйлүгү менен айырмаланган, өтө кеңири таралган итерациялык методдордун бири болуп, Гаусс–Зейделдин методу саналат.

А дегенде, бул методду төмөнкү теңдемелер системасын (баштапкы теңдемелер системасында  $n = 3$  болгон учурда) чыгаруу мисалында түшүндүрөлү:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Айталы,  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  диагоналдык элементтери нөлдөн айырмалуу (тескери учурда теңдеменин ордун алмаштырууга болот) болсун. Системадагы биринчи, экинчи жана үчүнчү теңдемелерден тиешелүү  $x_1, x_2$  жана  $x_3$  белгисиздерин туюнталы:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \quad (3.20)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3), \quad (3.21)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2). \quad (3.22)$$

Белгисиздердин кээ бир баштапкы (нөлдүк) жакындатылган маанилерин берели:  $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, x_3 = x_3^{(0)}$ . Бул маанилерди (3.20) туюнтмасынын оң жагына коюп,  $x_1$  үчүн жаңы (биринчи) жакындатуу алабыз:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}).$$

$x_1$  үчүн бул маанини жана  $x_3$  үчүн  $x_3^{(0)}$  жакындатууну пайдаланып, (3.21) туюнтмасынан  $x_2$  үчүн биринчи жакындатуу табылат:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}),$$

жана акырында, эсептелинген  $x_1 = x_1^{(1)}, x_2 = x_2^{(1)}$  маанилерин пайдаланып, (3.22) туюнтмасынын жардамы менен  $x_3$  үчүн биринчи жакындатууну табабыз:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}).$$

Ушуну менен (3.20)-(3.22) системасын чыгаруунун биринчи итерациясы бүтөт. Эми  $x_1^{(1)}$ ,  $x_2^{(1)}$ ,  $x_3^{(1)}$  маанилерин пайдаланып, жогорудагыдай эле ыкма менен экинчи итерацияны жүргүзсөк болот. Анын жыйынтыгында чечимге экинчи жакындатуу табылган болот, б.а.  $x_1 = x_1^{(2)}$ ,  $x_2 = x_2^{(2)}$ ,  $x_3 = x_3^{(2)}$ , ж.у.с.

$(k-1)$ -номердеги жакындатууну билип,  $k$ -чы номердеги жакындатууну төмөнкүдөй эсептөөгө болот:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}),$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}),$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}).$$

Итерациялык процесс азырынча берилген каталыгы менен  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ ,  $x_3^{(k)}$  маанилери,  $x_1^{(k-1)}$ ,  $x_2^{(k-1)}$ ,  $x_3^{(k-1)}$  маанилерине жакын болмоюнча улантыла берет.

**Мисал.** Төмөнкү теңдемелер системасын Гаусс-Зейделдин методунун жардамы менен чыгаргыла:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Берилген теңдемелер системасынын чечими  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  болорун жеңил эле текшерүүгө болот.

**Чыгаруу.**  $x_1$ ,  $x_2$  жана  $x_3$  белгисиздерин, тиешелүү биринчи, экинчи жана үчүнчү теңдемеден туюнталы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3), \\ x_2 = \frac{1}{6}(7 - 2x_1 + x_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2). \end{cases}$$

Баштапкы жакындатуу катары  $x_1^{(0)} = 0$ ,  $x_2^{(0)} = 0$ ,  $x_3^{(0)} = 0$  маанилерин алалы. Белгисиздердин жаңы жакындатууларын табалы:



$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4+0-0) = 1, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(7-2 \cdot 1+0) = 0.8333333, \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{3}(1+2 \cdot \frac{5}{6}) = 0.8888889. \end{cases}$$

Кийинки жакындатуу окшош эле эсептелинет:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(4 + \frac{5}{6} - \frac{8}{9}) = 0.9861111, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(7-2 \cdot \frac{71}{72} + \frac{8}{9}) = 0.9861111, \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{3}(\frac{71}{72} + 2 \cdot \frac{71}{72}) = 0.9861111. \end{cases}$$

Эсептелинген жакындатуулар жана кийинки жакындатууларды эсептегенден кийинки жыйынтык, төрт белгиге чейинки тактыкта төмөнкү таблицада келтирилген:

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	1.0000	0.8333	0.8889
2	0.9861	0.9861	0.9861
3	1.0000	0.9977	0.9985
4	0.9998	0.9998	0.9998
5	1.0000	1.0000	1.0000
6	1.0000	1.0000	1.0000

Итерациялык процесс, эки удаалаш итерацияда белгисиздердин маанилеринин арасындагы алынган айырма, б.а. бешинчи итерациядан баштап жок болгондуктан токтойт. Бул мисалдагы баштапкы жакындатууну каалагандай тандап чечимге жыйнала тургандай, компьютердин разряддуулугунун чегинде тактыкты көтөрүүгө болот.

Эми  $n$  белгисиздүү  $n$  сызыктуу теңдемелер системасын, б.а. баштапкы системаны карайлы. Аны төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Мында дагы, бардык диагоналдык элементтердин нөлдөн айырмалуу болушун талап кылабыз. Анда, Гаусс–Зейделдин методуна ылайык, чечимге  $k$ -чы жакындатууну төмөнкү көрүнүштө көрсөтүүгө болот:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \dots - a_{in}x_n^{(k-1)}). \quad (3.23)$$

Итерациялык процесс, бардык  $x_i^{(k)}$  маанилери  $x_i^{(k-1)}$  маанилерине жакын болмоюнча улантыла берет, б. а. итерацияны аяктоо критерийи катары (3.15)-(3.17) шарттарынын бири пайдаланылат.

(3.23) итерациялык процесстин жыйналуучу болушу үчүн, системадагы ар бир теңдеме үчүн, диагоналдык коэффициенттердин модулу, бардык калган коэффициенттеринин модулдарынын суммасынан кичине болбошу (диагоналдык элементтердин үстөмдүгү) жетиштүү:

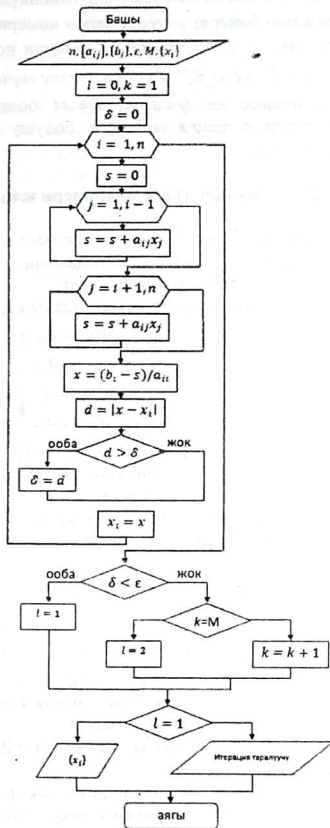
$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.24)$$

Мында, жок дегенде бир теңдеме үчүн, барабарсыздык чоң белгиде аткарылышы керек. Бул шарттар методдун жыйналуучулугу үчүн жетиштүү, бирок зарыл болуп саналбайт, б.а. (3.24) шарттары бузулган учурда дагы, кээ бир системалар үчүн итерация жыйналуучу болот.

Жөнөкөй итерация методу менен компьютерде эсептегенибизде улам кийинки циклда, алдыңкы циклда эсептелинген жакындатуунун бардык компоненттерин колдонууга туура келет, ал эми Гаусс-Зейделдин методу менен эсептегенде удаалаш керек болгондо эсептелинет. Демек, итерация методдорун пайдаланганда, ар бир итерациянын эсептөө тактыгы, алдынкы итерациянын жыйынтыгы менен аныкталып, мурда аткарылган эсептөөлөрдөн көз каранды болбогондуктан, акыркы жыйынтыкта каталык топтолбойт.

**Гаусс-Зейделдин методунун алгоритми.** Сызыктуу теңдемелер системасын Гаусс-Зейделдин методунда чыгаруунун алгоритми 3.3-сүрөттө көрсөтүлгөн. Анда баштапкы берилгендер катары  $n$ , теңдемелер системасынын коэффициенттери жана оң жактары,  $\varepsilon$  каталыгы, мүмкүн болгон максималдуу итерациянын саны  $M$ , ошондой эле  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) өзгөрүлмөлөрүнүн баштапкы жакындатуулары кийирилет. Баштапкы жакындатууларды компьютерге кийирбестен эле, кээ бир маанилерге (мисалы, нөлгө) барабар деп алсак болоорун белгилеп кетели. Итерацияны аяктоо критерийи катары (3.16) шарты тандалган, анда  $\delta$  аркылуу  $x_i^{(k)}$  жана  $x_i^{(k-1)}$  айырмасынын максималдык абсолюттук чоңдугу белгиленген:

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon.$$



3.3-сүрөт. Гаусс-Зейделя методу.

Блок-схемадагы башка белгилөөлөр төмөнкүдөй мааниге ээ:  $k$  – итерациянын катар номери;  $i$  – тендеменин номери, ошондой эле тиешелүү циклда эсептелинген өзгөрмөнүн номери:  $j$  – (3.23) катышындагы  $a_{ij}x_j^{(k)}$  же  $a_{ij}x_j^{(k-1)}$  көрүнүштөгү мүчөлөрүнүн номери. Итерациялык процесс же  $\delta < \varepsilon$  же  $k = M$  болгон учурда токтотулат. Акыркы учурда итерация таралуучу болушу жөнүндө маалымат экранда чыгыш керек.

#### 3.4. Матрицанын өздүк маанилери жана өздүк векторлору.

Көп сандагы илимий–техникалык маселелер, эсептөө математикасы жагындагы изилдөөлөр, матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табууну талап кылат.

$n$  – тартиптеги квадраттык матрицаны карайлы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Аныктама.**  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  вектору  $A$  матрицасынын  $\lambda$  өздүк маанисине туура келүүчү, өздүк вектору деп аталат, эгерде ал

$$Ax = \lambda x \quad (3.25)$$

теңдемелер системасын канааттандырса.

**Аныктама.** Берилген  $A$  матрицасынын  $C$  мүнөздүк матрицасы деп,

$$C = A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix},$$

көрүнүштөгү матрицаны айтабыз, мында  $E$  – бирдик матрица. Көрүнүп тургандай, (3.25) системасын

$$(A - \lambda E)x = 0 \quad \text{же} \quad Cx = 0 \quad (3.26)$$

көрүнүштө жазууга болот.

Эгерде  $x$  векторунун координаталык формадагы жазылышына өтсөк, анда берилген матрицаны эске алып, системаны төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Алынган (3.26) же (3.27) системасы  $n$  белгисиздүү  $n$  сызыктуу теңдемелер бир тектүү система болуп, ар дайым нөлдүк чыгарылышка ээ. Ал нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот, качан гана анын аныктагычы нөлгө барабар болсо:  $\det C = 0$ , бирок, чечими жалгыз эмес.

$C$  матрицасынын аныктагычы,  $\lambda$  га карата  $n$ -чи даражадагы көп мүчө болуп:

$$\det C = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n, \quad (3.28)$$

мүнөздүк көп мүчө деп аталат. Бул көп мүчөнүн тамырлары  $A$  матрицасынын өздүк маанилери болот.

Матрицанын өздүк векторун табуу үчүн, жалгыз гана чечимге ээ болбогон, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын чыгаруу талап кылынат. Сызыктуу алгебра курсунан белгилүү болгондой, бул учурда системанын жалпы чыгарылышынын структурасы төмөнкү көрүнүшкө ээ: эркин деп аталган бир же бир канча белгисиздер каалагандай маанилерди кабыл алат, ал эми калган белгисиздер эркин белгисиздер аркылуу туюнтулат. Эркин белгисиздердин саны, калган теңдемелердин натыйжасы болгон системадагы теңдемелердин санына барабар. Практикада, эгерде эркин белгисиз бирөө болсо, аны кээ бир санга барабарлап алабыз, мисалы, бирге. Андан кийин калган белгисиздер (вектордун компоненттери) калган теңдемелердин натыйжасы болгон теңдемени алып салгандан кийинки сызыктуу көз каранды эмес теңдемелер системасынан бир маанилүү табылат. Бул процедура маселенин жыйынтык чечимине таасир этпейт, андыктан белгилеп өткөндөй, өздүк векторлор турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактыкта табылат.

Мисал. Матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун эсептейли:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Чыгаруу. Мүнөздүк көп мүчөнү түзөбүз

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Экинчи даражадагы бул көп мүчөнүн тамырларын табабыз:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5.$$

$\lambda_1 = 2$  үчүн, төмөнкүнү алабыз

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

же

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Бул бир эле теңдеме, андыктан, системанын аныктагычы нөлгө барабар.

$x_2 = b$  эркин өзгөрүлмө деп, биринчи  $x_1 = (-2b, b) = b(-2, 1)$  өздүк векторун алабыз. Экинчи,  $\lambda_2 = 5$  өздүк маанисин коюп:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

мындан,  $x_1 = c$  эркин өзгөрүлмөсү аркылуу  $A$  матрицасынын экинчи өздүк вектору аныкталат:  $x_2 = (c, c) = c(1, 1)$ .

$b$  жана  $c$ , каалагандай сан болгондуктан, бир эле өздүк мааниге бир нече өздүк векторлор тура келет. Мисалы, бир тектүү системанын фундаменталдык чыгарылышына туура келүүчү өздүк векторлор  $x_1 = (-2, 1)$ ,  $x_2 = (1, 1)$  көрүнүштө болот.

Биз, экинчи тартиптеги матрица үчүн, өздүк маанилерди жана өздүк векторлорду эсептөөнүн эң жөнөкөй мисалын карадык. Кээ бир атайын учурлар үчүн жана үчүнчү тартиптеги матрицалар үчүн, маселенин чыгарылышын окшош жүргүзүү кыйынчылыкты туудурбайт.

Жалпы учурда, өзгөчө жогорку тартиптеги матрицалар үчүн, алардын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табуу, өздүк маанилердин толук проблемасы деп аталган маселе, бир кыйла таталыраак.

Баштапкы матрицанын жекече типтери үчүн, өздүк маанилердин кээ бир касиеттерин белгилеп өтөлү:

- Симметриялык матрицанын бардык өздүк маанилери чыныгы.
- Эгерде матрицанын өздүк маанилери чыныгы жана ар түрдүү болсо, анда аларга туура келген өздүк векторлор ортогоналдуу жана каралган мейкиндикте базисти түзөт. Ошондуктан, учурдагы мейкиндикте, каалагандай векторду, сызыктуу көз каранды эмес өздүк векторлордун жыйындысы аркылуу көрсөтүүгө болот.
- Эгерде  $A$  жана  $B$ , эки матрица окшош болсо, б.а. алар

$$B = P^{-1}AP$$

катышында байланышса, анда алардын өздүк маанилери дал келет, мында  $P$  – кээ бир матрица.

Окшош өзгөртүп түзүүнү баштапкы матрицаны жөнөкөйлөтүү үчүн пайдаланууга болот, ал эми анын өздүк маанилерин эсептөө жөнүндөгү маселе, жөнөкөй матрица үчүн окшош маселеге алынып келет. Каралган матрица эң мыкты жөнөкөйлөндү деп айтабыз, эгерде ал үч бурчтук көрүнүшкө келтирилген болсо:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бизге белгилүү, үч бурчтук матрицанын аныктагычы, анын диагоналдык элементтеринин көбөйтүндүсүнө барабар, андыктан, (3.28) мүнөздүк көп мүчө, бул учурда төмөнкү көрүнүштү алат.

$$\det C = (a'_{11} - \lambda)(a'_{22} - \lambda) \dots (a'_{nn} - \lambda).$$

Бул көп мүчөнүн тамырларына барабар болгон матрицанын өздүк маанилерин, дароо эле алабыз:

$$\lambda_1 = a'_{11}, \lambda_2 = a'_{22}, \dots, \lambda_n = a'_{nn}.$$

Демек, үч бурчтук матрицанын өздүк маанилери, анын диагоналдык элементтерине барабар. Бул, албетте, үч бурчтук матрицанын жекече учуру болгон, диагоналдык матрицага дагы тиешелүү.

Окшош өзгөртүп түзүүнүн жардамы менен кээ бир типтеги матрицалар, үч бурчтук көрүнүшкө алынып келет. Аны менен катар, симметриялык матрицаны диагоналдык көрүнүшкө келтирүүгө болот. Практикада симметриялык матрицаны үч диагоналдуу көрүнүшкө келтирүү көп пайдаланылат. Алынган матрица үчүн, өздүк маанилерди эсептөө процедурасы, баштапкы матрица үчүн маселеге салыштырмалуу бир кыйла жөнөкөйлөйт.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Үч бурчтук матрицанын элементтери компьютердин оперативдик эсине жолчосу боюнча кийирилет. Бул матрицанын аныктагычын эсептөө алгоритмин жазгыла.
2. Төмөнкү теңдемелер системасын

$$0.1x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0.6,$$

$$0.3x_1 + 6.01x_2 - 25x_3 = 1.852,$$

$$0.4x_1 + 8.06x_2 + 10.001x_3 = 2.91201.$$

Гауссстун методу менен чыгаргыла.

3. Гауссстун методу пайдаланып, төмөнкү теңдемелер системасын  $10^{-4}$  каталыкта эсептегиле:

$$1.20x_1 - 0.20x_2 + 0.30x_3 = -0.60,$$

$$-0.20x_1 + 1.60x_2 - 0.10x_3 = 0.30,$$

$$-0.30x_1 + 0.10x_2 - 0.50x_3 = 0.40.$$

4. Гауссстун методунун даяр алгоритминен пайдаланып Гауссстун методу боюнча тескери матрицаны эсептөө алгоритмин жазгыла.

5. Прогонка методунун жардамында теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$2x_1 + x_2 = 2,$$

$$x_1 + x_2 - 0.10x_3 = 1,$$

$$0.10x_2 - x_3 = 1.$$

6. Төмөнкү теңдемелер системасы үчүн, жөнөкөй итерация жана Гаусс-Зейделдин методдорун бешинчи итерацияга чейин аткаргыла:

$$10x_1 + x_2 - 2x_3 = 10,$$

$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 10,$$

$$3x_1 - x_2 + 10x_3 = 5.$$

Жакындатылган чечимдерде ишенимдүү белгилеринин санын канчоо деп алсак болот.

7.  $10^{-3}$  тактыгы менен Гаусс-Зейделдин методунда теңдемелер системасын чечкиле:

$$5.6x_1 + 2.7x_2 - 17x_3 = 1.6,$$

$$3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = 2.8,$$

$$0.8x_1 + 1.8x_2 + 3.7x_3 = 2.1.$$

8. Матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун тапкыла:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$



## 4-ГЛАВА. ФУНКЦИЯНЫ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛОО

### 4.1. Маселенин коюлушу.

Айталы, интерполяция түйүндөрү деп аталган  $x_0, x_1, \dots, x_n$  чекиттери жана бул чекиттерде кээ бир  $f(x)$  функциясынын маанилери берилсин:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n. \quad (4.1)$$

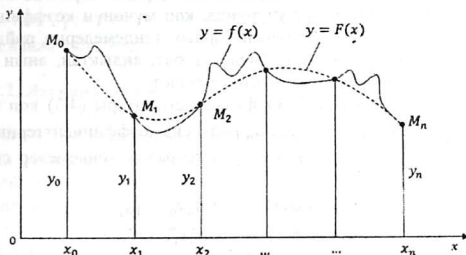
Кээде кыскача,  $f(x)$  функциясы төмөнкү таблицасы менен берилсин деп айтабыз:

$x$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_i$	$\dots$	$x_n$
$f(x)$	$y_0$	$y_1$	$\dots$	$y_i$	$\dots$	$y_n$

Белгилүү класска таандык болгон жана интерполяция түйүндөрүндө  $f(x)$  функциясы кабыл алган маанилерди алган, интерполяциялоочу  $F(x)$  функциясын тургузуу талап кылынсын, б.а.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (4.2)$$

Маселе, мындай жалпы коюлушта, чексиз көп чечимге же такыр чечимге ээ болбошу мүмкүн (4.1-сүрөт).



4.1-сүрөт

Бирок, бул маселе бир манилүү болот, эгерде каалагандай  $F(x)$  функциясынын ордуна, (4.2) шартты канааттандырган даражасы  $n$  ден жогору болбогон

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (4.3)$$

көп мүчөнү издесек, б.а.

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n.$$

Алынган

$$y = F(x)$$

интерполяциялык формуласын, интерполяция түйүндөрүнөн айырмалуу болгон,  $x$  аргументинин маанилери үчүн берилген  $f(x)$  функциясынын маанилерин ар качан жакындаштырып эсептөө үчүн пайдаланабыз. Мындай операция  $f(x)$  функциясын *интерполяциялоо* деп аталат. Интерполяциялоочу  $F(x)$  функциясы бардык каралган интервал үчүн же бул интервалдын айрым бөлүктөрү үчүн өзүнчө түзүлүшү мүмкүн. Биринчи учурда глобалдык интерполяция жөнүндө, ал эми экинчи учурда *локалдык (же бөлүкчө) интерполяция* жөнүндө айтылат.

Интерполяция, четки түйүндөрдүн арасындагы чекиттерде функцияны жакындаштыруу үчүн пайдаланылат, б.а.  $x_0 < x < x_n$ . Бирок кээде ал, каралып жаткан интервалдын сырткы чекиттеринде ( $x < x_0$ ,  $x > x_n$ ) функцияны жакындаштырып эсептөө үчүн дагы колдонулат. Бул жакындатуу *экстраполяция* деп аталат.

Интерполяциялоочу  $F(x)$  функциясы катары, интерполяциялык көп мүчө деп аталган, (4.3) көп мүчөнүн колдонулушун карайлы. Глобалдык интерполяция учурунда, б.а. бардык каралган интервал үчүн бир көп мүчөнү түзүү учурунда, көп мүчөнүн коэффициенттерин табуу үчүн (4.2) системанын бардык теңдемелерин пайдалануу зарыл. Бул система  $n+1$  теңдемеден турат, андыктан, анын жардамында  $n+1$  коэффициентти аныктоого болот.

(4.2) системасында  $F(x)$  функциясы катары (4.3) көп мүчөнү пайдаланган учурда,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  белгисиз коэффициенттерине карата төмөнкү көрүнүштөгү сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1, \\ \dots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Алгебрада, бул системанын аныктагычы *Вандермондтун аныктагычы* деп аталат. Вандермондтун аныктагычы нөлдөн айырмалуу экендигин көрсөтүүгө болот, эгерде  $i \neq k$  үчүн  $x_i \neq x_k$  болсо, б.а. эгерде интерполяция түйүндөрүнүн арасында дал келген түйүндөр жок болсо. Ошондуктан, бул учурда (4.4) системасы жалгыз гана чечимге ээ. Интерполяциялык көп мүчөнү түзүүнүн мындай методу, *аныкталба-*

ган коэффициенттер методу деп аталат. Аны менен бирге, бул метод бир кыйла көлөмдөгү эсептөөлөрдү талап кылат, айрыкча түйүндөрдүн саны көп болгон учурда.

**Мисал.** Айталы,  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$  жана  $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 3$  маанилери берилсин.  $F(0) = 1, F(1) = 1, F(2) = 3$  шарттарын канааттандырган экинчи даражадагы  $F(x)$  көп мүчөсүн табуу талап кылынсын.

Изделүүчү көп мүчөнү  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  көрүнүштө жазып, (4.4) теңдемелер системасын түзөбүз

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 1,$$

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 1,$$

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 3,$$

же

$$a_0 = 1,$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1,$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3,$$

мындан  $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1$  болгондуктан, изделүүчү интерполяциялык көп мүчө  $F(x) = 1 - x + x^2$  көрүнүштү алат жана коюлган шарттарды канааттандырышын жеңил эле текшерүүгө болот.

## 4.2. Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсү.

Глобалдык интерполяция учуруна өтөлү, б.а. бардык  $[x_0, x_n]$  кесиндиси үчүн жалпы интерполяциялык көп мүчөнү түзөлү. Жогоруда белгиленгендей, мындай көп мүчөнү түзүү үчүн, (4.4) теңдемелер системасын чечүү жетиштүү, бирок бул ыкма эффективдүү эмес.

Интерполяциялык көп мүчөнү  $n$ -даражадагы көп мүчөлөрдүн сызыктуу комбинацисы көрүнүшүндө издейли:

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x). \quad (4.5)$$

Бул учурда, ар бир  $l_i(x)$  көп мүчөлөрү бардык интерполяция түйүндөрүндө нөлгө барабар болушун талап кылабыз, бир гана ( $i$ -чи) түйүндө, ал бирге барабар болушу керек.  $i = 0$  болгондо, бул учурга төмөнкү көрүнүштөгү көп мүчө туура келишин жеңил эле текшерүүгө болот:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}. \quad (4.6)$$

Чындыгында,  $l_0(x_0) = 1$ . Ал эми  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$  болгондо, (4.6) туюнтмасынын алымы нөлгө айланат. (4.6) менен аналогиясы боюнча төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\begin{aligned}
 l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)}, \\
 l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3) \dots (x_2-x_n)}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 l_i(x) &= \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 l_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.6), (4.7) туюнтмаларын (4.5) коюп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}. \tag{4.8}$$

Бул формула *Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсү* деп аталат.

Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнөн,  $n=1$  болгондо сызыктуу интерполяция үчүн туюнтма алабыз:

$$L(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1.$$

Ал эми  $n=2$  болгондо квадраттык интерполяция үчүн туюнтма алууга болот:

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

Лагранждын формуласын кыска көрүнүшкө келтирүүгө болот.

Ал үчүн төмөнкү белгилөөнү кийирели

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n). \tag{4.9}$$

Бул көбөйтүүчүлөрдү  $x$  боюнча дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз:

$$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \dots (x-x_n).$$

Мейли  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) болсун, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n). \tag{4.10}$$

(4.9) жана (4.10) туюнтмаларын, (4.8) формулага коюп Лагранждын интерполяциялык формуласынын кыскарган формасын алабыз:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i} P_{n+1}(x_j)}{(x - x_i) \prod_{j \neq i} P'_{n+1}(x_j)} \cdot y_i. \quad (4.11)$$

**Мисал.** Эсептөө экспериментинин жыйынтыгында  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$  чекиттеринде,  $f(x)$  функциясынын тиешелүү  $y_0 = 2$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 8$  маанилери алынсын.  $f(x)$  функциясын жакындатып туюнтуучу экинчи даражадагы  $L(x)$  көп мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу. (4.8) формуласы боюнча эсептейли

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} \cdot 8 = \\ &= \frac{15}{6}x^2 - \frac{21}{2}x + 10. \end{aligned}$$

Табылган көп мүчө  $L(1) = 2$ ,  $L(3) = 1$ ,  $L(4) = 8$  шарттарын канааттандырат.

**Мисал.**  $y = \sin \frac{\pi x}{2}$  функциясы үчүн, Лагранждын интерполя-

циялык көп мүчөсүн  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 1$  түйүндөрүндө тургузгула.

Чыгаруу. Функциянын маанисин, тандалган түйүндөрдө эсептейли:

$$y_0 = \sin 0 = 0, \quad y_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Демек, функция төмөнкү таблицасы менен берилген болот:

$x$	0	$\frac{1}{3}$	1
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

Анда Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнүн формуласын колдонуп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)}{\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)} \cdot 0 + \frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(x-0)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(1-0)\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \cdot 1$$

же

$$L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x.$$

Тургузулган көп мүчө  $L(0) = 0$ ,  $L\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $L(1) = 1$  шарттарын канааттандырат.

### Лагранждын формуласын программалоо.

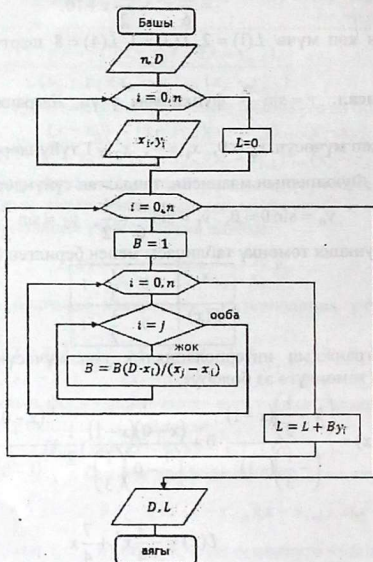
Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$L(x) = \sum_{j=0}^n B_j \cdot y_j,$$

мында

$$B_j = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i},$$

бирок, бул учурда сөзсүз түрдө  $i \neq j$  шарты аткарылышы керек.



4.2 - сүрөт. Лагранждын формуласы боюнча интерполяциялоо алгоритминин схемасы.

Алгоритмди түзүүдө бири-бирине камтылган эки циклдык конструкция пайдаланылат: ички циклда  $B_j = \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, (i \neq j)$

көбөйтүүнү, ал эми тышкы циклда  $L(x) = \sum_{j=0}^n B_j \cdot y_j$  сумманы чогул-табыз. 4.2-сүрөттөгү алгоритм ачык көрүнүштөгү интерполяциялык көп мүчөнү алууну алдын ала караштырбайт. Алгоритм, берилген  $x = D$  чекитинде функцияны интерполяциялоо маселесин дароо чечет.

Алгоритмдеги белгилөөлөр:  $n$  – Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнүн даражасы б.а.  $n = N - 1$  мында  $N$  – түйүндөрдүн саны;  $D$  – аргументтин чекиттеги мааниси;  $L$  – (4.8) көп мүчөсүнүн мааниси.

### 4.3. Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсү.

Буга чейин интерполяция түйүндөрүнүн бөлүштүрүлүшү же жайгашышы жөнүндө эч кандай талап айтылган жок. Эми аргументтин маанилеринин бирдей алыстатылган учурун карайлы, б. а.  $x_i - x_{i-1} = h = const, (i = 1, 2, \dots, n)$ . Мында  $h$  чондугу *кадам* деп аталат.

Чектүү айырма түшүнүгүн дагы кийирели. Айталы,  $x_i$  түйүндөрүндө функциянын маанилери белгилүү болсун:  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Функциянын маанилеринин айырмасын түзөлү:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h).$$

Бул маанилер, функциянын *биринчи айырмасы* же *биринчи тартиптеги айырма* деп аталат.

Функциянын экинчи айырмасын түзүүгө болот:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots$$

Жогорудагыга окшош  $k$  – чы тартиптеги айырманы түзөбүз:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Чектүү айырманы тикеден тике функциянын маанилери аркылуу туюнтууга болот. Мисалы,

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) - ((y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Каалагандай  $k$  үчүн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0. \quad (4.12)$$

Бул формуланы  $x_i$  түйүндөрүндөгү айырманын маанилери үчүн дагы жазууга болот:

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - ky_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i.$$

Чектүү айырманы пайдаланып  $y_k$  ны аныктоого болот:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0.$$

Эми Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүн түзүүгө өтөлү.

Бул көп мүчөнү төмөнкү көрүнүштө издейли:

$$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \quad (4.13)$$

Көп мүчөнүн графиги берилген түйүндөр аркылуу өтүшү керек, б.а.  $N(x_i) = y_i$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Бул шарттарды көп мүчөнүн коэффициенттерин табуу үчүн пайдаланабыз:

$$N(x_0) = a_0 = y_0,$$

$$N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1,$$

$$N(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2,$$

Мындагы  $a_0, a_1, a_2$  коэффициенттерин табалы:

$$a_0 = y_0,$$

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Башка коэффициенттерин окшош эле табууга болот. Анда коэффициенттерди табуунун жалпы формуласы төмөнкү көрүнүштү алат:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$



Бул туюнтмаларды (4.13) формулага коюп, төмөнкү көрүнүштөгү Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүн алабыз:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots \quad (4.14)$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

мында,  $\Delta^k y_0$  чектүү айырманы (4.12) формула боюнча эсептөөгө болот.

Практикада (4.14) формуласы башкача көрүнүштө колдонулат. Ал үчүн  $t = (x - x_0)/h$  өзгөрүлмөсүн кийирсек, анда

$$x = x_0 + th, \quad \frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1,$$

$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_1-(x_2-x_1)}{h} = t-1-1 = t-2,$$

.....

$$\frac{x-x_{n-1}}{h} = t-n+1.$$

Бул катыштарды эсепке алып, (4.14) формуласын кайтадан төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$N(x) = N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (4.15)$$

Алынган туюнтма, алдыга интерполяция кылуу үчүн, *Ньютондун биринчи интерполяциялык көп мүчөсү* деп аталат. Ал берилген  $y = f(x)$  функциясын бардык  $[x_0, x_n]$  кесиндисинде аргументтин өзгөрүүсү менен жакындатып алмаштырат. Бирок, эсептөөдөгү тактыкты көтөрүүнү карасак (тегеректөөдөгү каталыкты азайтуу жолу менен), каралган кесиндинин сол жарымындагы чекиттерде функциянын маанилерин эсептөө үчүн, Ньютондун биринчи интерполяциялык көп мүчөсүн пайдалануу максатка ылайыктуу.

Ньютондун биринчи интерполяциялык көп мүчөсүнөн: ( $n = 1$ ) сызыктуу жана ( $n = 2$ ) квадраттык интерполяция үчүн формулаларын алууга болот

$$N(x) = y_0 + t\Delta y_0, \quad n = 1;$$

$$N(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0, \quad n = 2.$$

$[x_0, x_n]$  кесиндисинин оң жарымы үчүн, айырманы оң жактан сол жакка эсептөө артыгыраак. Бул учурда  $t = (x - x_n)/h$ , б.а.  $t < 0$  болуп жана төмөнкү көрүнүштөгү Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүн алабыз:

$$N(x) = N(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (4.16)$$

Алынган формула, артка интерполяция кылуу үчүн, *Ньютондун экинчи интерполяциялык көп мүчөсү* деп аталат.

Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүнүн колдонулушун мисалда карайлы.

**Мисал.** Төмөнкү таблицада берилген,  $y = f(x)$  функциясынын маанисин  $x = 0.1$  чекитинде эсептейли.

x	y
0	1.272
0.2	4.465
0.4	5.644
0.6	5.809
0.8	3.961
1.0	2.101

Чыгаруу. Эсептөө процессин берилген таблицага улап толтуруу ыңгайлуу болот. Мында ар бир кийинки чектүү айырма, мурунку мамычанын төмөнкү жолчодогусунан жогоркусун (тушундагы) кемиткенден алынат.

x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1.272	3.193	-2.014	1.000	-1.999	4.99
0.2	4.465	1.179	-1.014	-0.999	3.000	9
0.4	5.644	0.165	-2.013	2.001		
0.6	5.809	-1.848	-0.012			
0.8	3.961	-1.860				
1.0	2.101					

$x = 0.1$  болгондо,  $t = (x - x_0)/h = (0.1 - 0)/0.2 = 0.5$  болот. (4.15) формуласы боюнча беш разряды менен эсептөөнү жүргүзүп (таблицадагы

ар бир мамычанын жогорку жолчосундагы алды сызылган айырмаларды пайдаланып), төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned}
 f(0.1) \approx N(0.1) &= 1.272 + 0.5 \cdot 3.193 + \frac{0.5(0.5-1)}{2!} \cdot (-2.014) + \\
 &+ \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!} \cdot 1.000 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!} \cdot \\
 &\cdot (-1.999) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(0.5-4)}{5!} \cdot 4.999 = \\
 &= 1.272 + 1.597 + 0.2518 + 0.06249 + 0.07806 + 0.1367 = 3.398.
 \end{aligned}$$

Сальштыруу үчүн, (4.16) формуласы боюнча эсептөөнү окшош эле жүргүзөлү. Бул учурда  $t = (x - x_n)/h = (0.1 - 1)/0.2 = -4.5$  болот жана таблицандагы ар бир мамычадагы акыркы жолчолордогу алды сызылган чектүү айырмаларды пайдаланабыз. Анда

$$\begin{aligned}
 f(0.1) \approx N(0.1) &= 2.101 - 4.5 \cdot (-1.860) + \frac{-4.5(-4.5+1)}{2!} \cdot (-0.012) + \\
 &+ \frac{-4.5(-4.5+1)(-4.5+2)}{3!} \cdot 2.001 + \frac{-4.5(-4.5+1)(-4.5+2)(-4.5+3)}{4!} \cdot \\
 &\cdot 3.000 + \frac{-4.5(-4.5+1)(-4.5+2)(-4.5+3)(-4.5+4)}{5!} \cdot 4.999 = \\
 &= 2.101 + 8.370 - 0.09450 - 13.13 + 7.383 - 1.231 = 3.402.
 \end{aligned}$$

Көрүнүп тургандай, мында белгилүү өлчөмдө тактыктын жоголушу келип чыгат. Эгерде эсептөөнү так жүргүзсөк, анда (4.15) жана (4.16) формулалары бир эле жыйынтыкка алып келет:  $f(0.1) \approx 3.3975$ .

Биз, бирдей алыстатылган түйүндөр үчүн, Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүн түзүүнү карадык. Лагранждын көп мүчөсүнүн учурундагыдай, Ньютондун көп мүчөсүн каалагандай жайгашкан түйүндөр үчүн да түзүүгө болот.

Акырында, функциянын маанилеринин таблицасы берилген учурда, Лагранждын жана Ньютондун көп мүчөлөрүн түзүүнүн ар кандай ыкмалары, тең күчтүү интерполяциялык формулаларды берээрин белгилеп кетели. Бул, берилген даражадагы (дал келген интерполяция түйүндөрү жок учурда) интерполяциялык көп мүчөнүн жалгыздыгынан келип чыгат. Ньютондун көп мүчөсүн колдонуу ыңгайлуу, мисалы, эгерде интерполяция түйүндөрүнүн саны акырындык менен бара-бара көбөйсө. Бул учурда жаңы түйүндү эсепке алуу, (4.15) жана (4.16) формулаларындагы бир кошумча кошулуучуну эсептөө гана талап кылынат, ошол эле учурда, Лагранждын көп

мүчөсүн пайдаланганыбызда, (4.12) формуласындагы бардык кошулуучуларды кайрадан эсептөөнү талап кылат.

#### 4.4. Интерполяция тактыгы.

$y = F(x)$  интерполяциялык көп мүчөнүн графиги берилген чекиттер аркылуу өтөт, б.а. көп мүчөнүн жана берилген  $y = f(x)$  функциясынын маанилери  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) түйүндөрүндө дал келет. Эгерде  $f(x)$  функциясы дагы  $n$ -чи даражадагы көп мүчө болсо, анда  $f(x) \equiv F(x)$  теңдештиги орун алат. Жалпы учурда, интерполяция түйүндөрүнөн айырмалуу болгон чекиттерде:  $R(x) = f(x) - F(x) \neq 0$ . Бул айырма интерполяция каталыгы болот жана интерполяциялык формуланын калдык мүчөсү деп аталат. Калдык мүчөнүн маанисин баалайлы.

Айталы, берилген  $y_i$  сандары  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) чекиттеринде кээ бир  $y = f(x)$  функциясынын маанилери болсун дейли. Мейли, бул функция үзгүлтүксүз жана бардык  $(n+1)$ -чи тартипке чейинки туундуга ээ болсун. Бул учурда Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнүн калдык мүчөсү төмөнкү көрүнүштө болоорун көрсөтүүгө болот:

$$R_L(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_*). \quad (4.17)$$

Мында  $f^{(n+1)}(x_*)$ -кээ бир  $x = x_*$ ,  $x_* \in [x_0, x_n]$  чекитинде  $f(x)$  функциясынын  $(n+1)$ -чи тартиптеги туундусу. Эгерде бул туундунун максималдык мааниси

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$$

болсо, анда калдык мүчөнү баалоо үчүн формуланы жазууга болот:

$$|R_L(x)| \leq \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} M_{n+1},$$

мында

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Бул функцияны анализдеп,  $R_L(x)$  интерполяция каталыгы орто эсеп менен,  $x$  чекити  $[x_0, x_n]$  кесиндинин четки чекиттерине канчалык жакын жатса, ошончо жогору болот. Эгерде интерполяциялык көп мүчөнү  $[x_0, x_n]$  кесиндисинин сырткы чекиттеринде (экстраполя-

ция) функцияны жакындатуу үчүн пайдалансак, анда каталык олуттуу өсөт.

Бирдей алыстатылган түйүндөр учурунда, Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүнүн калдык мүчөсүн, (4.17) ден жеңил эле алууга болот:

$$R_N(x) = \frac{t(t-1)(t-2) \dots (t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_*) h^{n+1}, \quad t = \frac{x-x_0}{h}. \quad (4.18)$$

Эгерде  $\Delta^{n+1} y_n$  айырманы турактуу деп алсак, анда Ньютондун биринчи интерполяциялык көп мүчөсүнүн калдык мүчөсүнүн формуласын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$R_N(x) = \frac{t(t-1)(t-2) \dots (t-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0. \quad (4.19)$$

Дагы бир жолу өзгөчө белгилеп кетебиз, берилген интерполяция түйүндөрүнүн тизмегинде жалгыз гана интерполяциялык көп мүчө жашайт. Лагранждын, Ньютондун ж.б. формулалары бир эле көп мүчөнүн өзүн чыгарат (эсептөө так жүргүзүлгөн шартта). Айырмасы, аларды түзүүнүн алгоритминде гана. Ырас, Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсү, коэффициенттер үчүн ачык туюнтмаларды кармабайт.

Интерполяция ыкмасын тандоо ар түрдүү ойдо аныкталат: тактыгы, эсептөө убакыты, тегеректөөдөгү каталыгы ж.б. менен. Айрым учурларда локалдык интерполяция жогору бааланат, ошол эле убакта жогорку даражадагы жалпы көп мүчөнү түзүү (глобалдык интерполяция) ийгиликке алып келбейт.

Демек, интерполяция тактыгын көтөрүүнү, кадамды кичирейтип жана  $x_i$  түйүндөрүн атайын жайлаштырып коюу эсебинен кылуу максатка ылайыктуу. Локалдык интерполяция учурунда, интерполяциялык көп мүчөнүн даражасын көтөрүү дагы каталыкты азайтат, бирок, мында  $n$  дин чоңоюшу менен  $f^{(n+1)}(x)$  туундусу жөнүндө ар дайым эле биле бербейбиз. Ошондуктан, практикада кичине даражадагы көп мүчөлөрдү (сызыктуу жана квадраттык интерполяция формулаларын) пайдаланууга аракет кылышат.

#### 4.5. Тескери интерполяция.

Биз буга чейин  $x$  аргументинин  $x_0, x_1, \dots, x_n$  түйүндөрүнүн бирөөсү менен дагы дал келбеген учурда функциянын маанилерин издөө маселесин гана карадык.. Бирок кээде башка мүнөздөгү маселе-

лерге дагы туш болобуз: функциянын таблицасы боюнча, таблицага кирбеген, берилген функциянын маанисине тиешелүү,  $x$  аргументинин маанисин издөө. Мындай коюлган маселени тескери интерполяция маселеси деп атайбыз.

Тескери интерполяция маселесин, функциянын маанилерин, тескерисинче аргументтин маанилери катары эсептеп, бурууга болот. Бирок, функциялардын айырмалары турактуу эмес болгондуктан, анда тескери интерполяциялоо, аргументтин маанилери бирдей алыстатылган эмес, таблицада интерполяциялоого алып келет. Ушул себептен тескери интерполяциялоо үчүн, Лагранждын интерполяциялык формуласы колдонулат.

**Мисал.**  $y = f(x)$  функциясы төмөнкү таблица менен берилсин.

$x$	0.880	0.881	0.882	0.883
$y = f(x)$	2.4109	2.4133	2.4157	2.4181

Функциянын  $y = 2.4142$  мааниси  $x$  аргументинин кандай маанисине туура келишин аныктайлы.

Чыгаруу. Интерполяциялык формулаларда белгилөөлөрдү өзгөртпөстөн,  $x$  жана  $y$  тин орундарын алмаштыралы. Анда маанилери төмөнкү таблицада берилген  $y = \varphi(x)$  функциясын алабыз жана ал үчүн  $\varphi(2.4142)$  маанисин табуу талап кылынат. Бул учурда  $x$  тин маанилери бирдей алыстатылган болбой калат.

$x$	2.4109	2.4133	2.4157	2.4181
$y = \varphi(x)$	0.880	0.881	0.882	0.883

Лагранждын интерполяциялык формуласын колдонуп, ал формулада  $x = 2.4142$  деп алып, төмөнкүгө ээ болобуз (төрт түйүн,  $n = 3$ ):

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(2.4142 - 2.4133)(2.4142 - 2.4157)(2.4142 - 2.4181)}{(2.4109 - 2.4133)(2.4109 - 2.4157)(2.4109 - 2.4181)} \cdot 0.880 + \\
 &+ \frac{(2.4142 - 2.4109)(2.4142 - 2.4157)(2.4142 - 2.4181)}{(2.4133 - 2.4109)(2.4133 - 2.4157)(2.4133 - 2.4181)} \cdot 0.881 + \\
 &+ \frac{(2.4142 - 2.4109)(2.4142 - 2.4133)(2.4142 - 2.4181)}{(2.4157 - 2.4109)(2.4157 - 2.4133)(2.4157 - 2.4181)} \cdot 0.882 + \\
 &+ \frac{(2.4142 - 2.4109)(2.4142 - 2.4133)(2.4142 - 2.4157)}{(2.4181 - 2.4109)(2.4181 - 2.4133)(2.4181 - 2.4157)} \cdot 0.883 = \\
 &= -0.0634766 \cdot 0.880 + 0.6982422 \cdot 0.881 + \\
 &+ 0.4189453 \cdot 0.882 - 0.0537109 \cdot 0.883 = 0.88138.
 \end{aligned}$$

Демек,  $\varphi(2.4142) = 0.88138$ , б.а. таблицада берилген  $f(x)$  функциясы

2.4142 маанисин кабыл алганга, аргументтин  $x = 0.88138$  мааниси туура келет.

#### 4.6. Функциянын таблицасын тыгыздаштыруу.

Интерполяцияны берилген функциянын таблицасын тыгыздандыруу үчүн да колдонууга болот, б.а. көп сандагы аргументтин маанилери менен жаңы таблицаны, баштапкы таблица боюнча эсептөө. Бул операцияны кээде функцияны субтабуляциялоо деп аташат. Эгерде баштапкы таблица, турактуу кадамдагы таблица болсо, анда сөзсүз Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүн колдонобуз. Берилген түйүндөрдүн санында (б.а. чектүү айырма жана көп мүчөнүн даражасы колдо аныкталган шартта), Ньютондун формуласын компьютерде эсептөө үчүн Горнердин схемасы боюнча көрсөтүү ыңгайлуу. Демек, Ньютондун биринчи интерполяциялык формуласын төмөнкү көрүнүштө көрсөтүүгө болот:

$$N(x) = N(x_0 + th) = y_0 + t(\Delta y_0 + \frac{t-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{t-2}{3} (\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t-n+1}{n} \Delta^n y_0) \dots). \quad (4.20)$$

Горнердин схемасын,  $N(x)$  көп мүчөсүнүн маанисин циклда эсептөөгө мүмкүндүк берген үчүн пайдаланабыз. Эгерде пайдаланылуучу чектүү айырманын максималдык тартиби чоң эмес болсо, анда  $N(x)$  көп мүчөсүнүн маанисин эсептөө үчүн, анын стандарттык (4.15), (4.16) көрүнүштөгү Ньютондун формулалары пайдаланылат.

**Мисал.**  $k = 0.005$  кадамы менен  $[0.15, 0.180]$  кесиндисинде  $\sin x$  функциясынын беш маанилүү таблицасы берилсин. Бул таблицаны  $h = 0.001$  кадамы менен  $[0.155, 0.165]$  кесиндисинде тыгыздандыруу талап кылынсын.

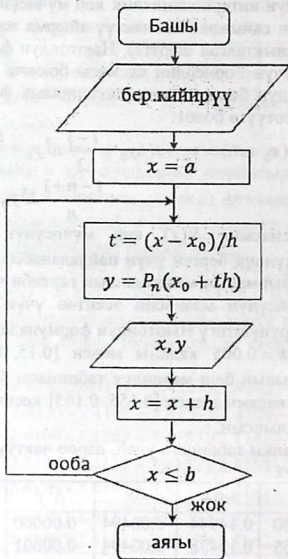
Чыгаруу. Баштапкы таблицага улап, дароо чектүү айырмалардын таблицасын түзөбүз.

$x$	$\sin x$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.150	0.14944	0.00494	0.00000	-0.00001
0.155	0.15438	0.00494	-0.00001	0.00001
0.160	0.15932	0.00493	0.00000	0.00000
0.165	0.16425	0.00493	0.00000	-0.00001
0.170	0.16918	0.00493	-0.00001	
1.175	0.17411	0.00492		
0.180	0.17903			

Таблицадан экинчи тартиптеги чектүү айырма нөлгө жакын экендиги көрүнүп турат. Ошондуктан, Ньютондун биринчи интерполяциялык көп мүчөсүн колдонгон учурда, биринчи үч кошулуучусу менен гана чектелебиз:

$$N(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0. \quad (4.21)$$

Албетте, мында  $x_0 = 0.150$  деп кабыл алабыз, ал эми ар бир  $x$  тин мааниси үчүн  $t$  нын мааниси  $t = (x - x_0)/h$  формуласы боюнча эсептелинет.



4.3-сүрөт

Төмөнкү таблицادا  $h = 0.001$  кадамы менен  $[0.155, 0.165]$  кесиндигинде  $t$ ,  $y = N(x)$  маанилери эсептелинген:



$x$	$t$	$y$
0.155	1.0	0.15438
0.156	1.2	0.15537
0.157	1.4	0.15636
0.158	1.6	0.15734
0.159	1.8	0.15833
1.160	2.0	0.15932
0.161	2.2	0.16031
0.162	2.4	0.16130
0.163	2.6	0.16228
0.164	2.8	0.16327
0.165	3.0	0.16426

Чектүү айырма жана көп мүчөнүн тартиби колдо аныкталган шартта, Ньютондун биринчи интерполяциялык формуласы боюнча,  $[a, b]$  кесиндисинде функцияны субтабуляциялоо алгоритми 4.3-сүрөттө келтирилген.

Функциянын таблицасын тыгыздандыруу программасын жазганда,  $a$  жана  $b$  аркылуу тыгыздандыруу кесиндисинин четки чекиттерин белгилесек, ал эми  $h_0$  – таблицанын эски кадамы,  $h$  – таблицанын жаңы кадамы,  $y_0$  – тыгыздандыруу кесиндисинин баштапкы чекитиндеги функциянын мааниси,  $y_1$  жана  $y_2$  – тиешелүү биринчи жана экинчи тартиптеги чектүү айырма деп алсак болот.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Айталы, функция маанилеринин таблицасы менен берилсин:

$x$	0.0	0.2	0.4	0.6
$y$	1.763	1.917	2.143	2.362

- а)  $n = 1$  жана  $n = 2$  болгондо Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн тургузгула.
- б)  $n = 1$  жана  $n = 2$  болгондо Ньютондун биринчи жана экинчи интерполяциялык көп мүчөсүн тургузгула.
- в) таблицасы менен берилген функция үчүн Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн тургузгула.
- г) функциянын маанисин  $x = 0.1$  чекитинде Ньютондун интерполяциялык көп мүчөсүн колдонуп эсептегиле жана жыйынтыктын каталыгын баалагыла.
2.  $y = f(x)$  функциясы төмөнкү таблица менен берилсин:

$x$	0.40	0.41	0.42
$y = f(x)$	3.331	3.356	3.381

Функциянын  $y = 3.348$  мааниси  $x$  аргументинин кандай маанисине туура келишин аныктагыла.

## 5-ГЛАВА. САНДЫК ДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ

### 5.1. Маселенин коюлушу.

Адегенде туундунун аныктамасын эске салалы.

**Аныктама.**  $y = f(x)$  функциясынын  $x_0$  чекитиндеги өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катышынын  $\Delta x$  нөлгө умтулгандагы предели, функциянын ушул чекиттеги туундусу деп аталат:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (5.1)$$

Адатта, туундуну эсептөө үчүн туундунун таблицасынан пайдаланып, (5.1) туюнтмага кайрылышпайт. Бирок, компьютерде сандык эсептөөдө туундунун таблицасынан пайдалануу, ар дайым эле ыңгайлуу жана мүмкүн боло бербейт. Аны менен бирге,  $y = f(x)$  функциясы таблицада берилиши мүмкүн. Мындай учурларда туундуну эсептөө үчүн сандык дифференцирлөөгө кайрылабыз.

Жакындатып дифференцирлөө формуласын келтирип чыгаруу үчүн, берилген  $y = f(x)$  функциясын  $[a, b]$  кесиндисинде интерполяциялоочу  $F(x)$  функциясына (көбүнчө көп мүчөгө) алмаштырып, жакындатып барабарлайт:

$$f'(x) = F'(x).$$

$y = f(x)$  функциясынын жогорку тартиптеги туундуларын табуу үчүн, жогорудагыга окшош эле кылууга болот.

Эгерде интерполяциялоочу  $F(x)$  функциясы үчүн

$$R(x) = f(x) - F(x)$$

каталыгы белгилүү болсо, анда  $F'(x)$  туундунун каталыгы төмөнкү формула менен туюнтулат

$$r(x) = f'(x) - F'(x) = R'(x),$$

б.а. интерполяциялоочу функциянын туундусунун каталыгы, бул функциянын каталыгынын туундусуна барабар. Бул жогорку тартиптеги туундулар үчүн дагы туура болот.

**5.2. Ньютондун биринчи жана экинчи интерполяциялык формулаларына негизделген, жакындатып дифференцирлөө формулалары.**

Айталы, турактуу  $h = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) кадамы менен таблицада берилген  $f(x)$  функциясын, жакындаштырып Ньютондун биринчи интерполяциялык көп мүчөсүнө алмаштыралы:

$$y \approx N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Бул көп мүчөнү  $x$  өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирлеп, татаал функцияны дифференцирлөө эрежесин эсепке алып:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dN}{dt},$$

каалагандай тартиптеги туундуну эсептөө үчүн формулаларды алууга болот:

$$y' \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots), \quad (5.2)$$

$$y'' \approx \frac{1}{h} (\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots),$$

Бул формулалардагы кошулуучулардын саны, туундуну эсептөө үчүн пайдаланылган түйүндөрдүн санынан көз каранды.

Жогорудагыга окшош эле, Ньютондун экинчи интерполяциялык формуласына негизделген, каалагандай тартиптеги туундуну эсептөө үчүн формулаларды алууга болот:

$$y' \approx \frac{1}{h} (\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{6} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{4t^3+15t^2+14t+5}{24} \Delta^4 y_{n-4} + \dots) \quad (5.3)$$

$$y^n \approx \frac{1}{h} (\Delta^2 y_{n-2} + (t+1)\Delta^3 y_{n-3} + \frac{6t^2 + 15t + 7}{12} \Delta^3 y_{n-4} + \dots$$

**Мисал.** Төмөнкү таблицада  $h = 0.1$  кадамы менен, берилген  $y = f(x)$  функциясынын туундусун  $x = 1.06$  чекитинде эсептегиле.

$x$	$y$
0.6	1.8221
0.7	2.0138
0.8	2.2255
0.9	2.4596
1.0	2.7183
1.1	3.0042
1.2	3.3201

Чыгаруу. Төмөндө чектүү айырмаларды эсептөө процесси, берилген таблицага улап толтурулган, мындагы ар бир кийинки чектүү айырма, мурунку мамычанын төмөнкү жолчодогусунан жогоркусун (тушундагыны) кемиткенден алынат.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.6	1.8221	0.1917	0.0200	0.0024
0.7	2.0138	0.2117	0.0224	0.0022
0.8	2.2255	0.2341	0.0246	0.0026
0.9	2.4596	0.2587	0.0272	0.0028
1.0	2.7183	0.2859	0.0300	
1.1	3.0042	0.3159		
1.2	3.3201			

Туундунун маанисин  $x$  үчүн, таблицанын акырыраагында аныктоо талап кылынгандыктан, артка интерполяция кылуу үчүн, (4.16) Ньютондун интерполяциялык формуласын колдонобуз. Ал үчүн  $x_n = 1.1$ ,  $y_n = 3.0042$ ,  $\Delta y_{n-1} = 0.2859$ ,  $\Delta^2 y_{n-2} = 0.0272$ ,  $\Delta^3 y_{n-3} = 0.0026$  деп алабыз. Анда  $h = 0.1$  жана  $t = -0.4$  болгондуктан, (5.3) формула боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f'(1.06) = 10 \cdot [0.2859 + \frac{2 \cdot (-0.4) + 1}{2} \cdot 0.0272 + \frac{3 \cdot (-0.4)^2 + 6 \cdot (-0.4) + 2}{6} \cdot 0.0026] = 2.8865.$$

Таблицада берилген функция,  $y = e^x$  функциясы, андыктан туундунун чын мааниси 2.8864 болот. Демек, каталык 0.0001 ге барабар. Мисалы, (5.2) формуласы боюнча эсептегенде төмөнкүнү алабыз:

$$f'(1.06) = 10 \cdot [0.1917 + \frac{2 \cdot 4.6 - 1}{2} \cdot 0.0200 + \frac{3 \cdot 4.6^2 - 6 \cdot 4.6 + 2}{6} \cdot 0.0024] = 2.8885.$$

Мында белгилүү өлчөмдө тактыктын жоголушу келип чыкты.

Албетте, башка учурларда, Ньютондун интерполяциялык формуласынын жардамы менен дифференциалдоо учурунда, каталык чон болуп калышы мүмкүн.

Таблицадагы аргументтин маанилери үчүн, туундуну табууну дагы жөнөкөйлөштүрүп аткарууга болот, б.а. туундуну табуу үчүн, туундуну чектүү айырмалар аркылуу туюнтуп, интерполяциялык көп мүчөлөрсүз табууга болот.

### 5.3. Бирдей аралыктагы түйүндөрдөгү Лагранждын интерполяциялык формуласына негизделген сандык дифференцирлөө.

Айталы,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – бирдей аралыктагы чекиттер болсун дейли, б.а.

$$x_i - x_{i-1} = h = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Бул учурда интерполяция кадамы  $h = (b - a)/n$  маанисин алат, ал эми Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсү бирдей аралыктагы түйүндөрдө түзүлөт. Берилген бирдей аралыктагы түйүндөрдө Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн түзүү үчүн, 4-главадагы (4.11) формуласын жазып алып, андан кийин түзөбүз:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x) y_i}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)},$$

мында

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Анда

$$L(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

$t = (x - x_0)/h$  өзгөрүлмөсүн кийирип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1} t(t-1)(t-2) \dots (t-n) = h^{n+1} t^{[n+1]} \quad (5.4)$$

жана

$$\begin{aligned} \Pi'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = \\ &= h^n i(i-1)(i-2) \dots 1(-1) \dots (-(n-i)) = (-1)^{n-i} h^n i!(n-i)!. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Демек, Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсү үчүн төмөнкү туюнтманы алабыз:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t^{[n+1]}}{t-i}. \quad (5.6)$$

Мындан

$$\frac{dx}{dt} = h$$

эсепке алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f'(x) \approx L'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{t^{[n+1]}}{t-i} \right\}. \quad (5.7)$$

Жогорку тартиптеги туундуларды берилген  $f(x)$  функциясы үчүн окшош эле табууга болот.

**Мисал.** Бирдей аралыктагы түйүндөрдө төмөнкү таблицадагы маанилери менен берилген функция үчүн, Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн түзгүлө ( $n=2, h=1$ ):

$x$	2	3	4
$f(x)$	6	-2	4

Чыгаруу.  $x = x_0 + th$ ,  $n=2$ ,  $h=1$  болгондуктан, (5.6) формуласын колдонуп, төмөнкүнү жазууга болот:

$$\begin{aligned} L(t+2) &= 6 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)}{2!t} + (-2) \cdot \frac{(-1)t(t-1)(t-2)}{t-1} + 4 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)}{2!(t-2)} = \\ &= 3(t-1)(t-2) + 2t(t-2) + 2t(t-1) = 7t^2 - 15 + 6. \end{aligned}$$

Алынган  $L(t+2) = 7t^2 - 15 + 6$  формула боюнча  $t=0; 1; 2$  болгон учурларда, түйүндөрдөгү функциянын таблицалык маанилерин алууга болот.

**Мисал.**  $x=2$  чекитинде, төмөнкү таблицасы менен берилген функциянын туундусунун жакындатылган маанисин эсептегиле:

$x$	1	2	3
$f(x)$	4	-1	2

Чыгаруу. Бул учурда  $x = x_0 + th$ ,  $n=2$ ,  $h=1$  болгондуктан, (5.7) формуласын колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d[(t-1)(t-2)]}{dt} + (-1) \cdot \frac{(-1)}{1} \cdot \frac{d[t(t-2)]}{dt} + 2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d[(t(t-1))]}{dt} = \\ &= 2(t-2+t-1) + (t-2+t) + 3(t-1+t) = \end{aligned}$$

$$= 12t - 11.$$

Мындан,  $x = 2$  түйүнүнө  $t = 1$  (б.а.  $t = (x - x_0)/h = (2 - 1)/1 = 1$ ) мааниси тиешелүү экендигин эсепке алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f'(2) \approx 1.$$

Каталыкты баалоо үчүн

$$r_n(x) = f'(x) - L'(x),$$

белгилүү болгон, (4.17) Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнүн каталыгынан пайдаланабыз

$$R(x) = f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x),$$

мында  $\xi = \xi(x)$  — мааниси  $x_0, x_1, \dots, x_n$  жана  $x$  чекитинин арасындагы аралык маани.

Айталы,  $f(x) \in C^{n+1}$  болсун, жана (5.4) эске алып жазалы:

$$r_n(x) = R'(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ f^{(n+1)}(\xi) \Pi'_{n+1} + \Pi_{n+1} \frac{d}{dx} [f^{(n+1)}(\xi)] \right\}.$$

Мындан, (5.5) эске алып жана мейли  $\frac{d}{dx} [f^{(n+1)}(\xi)]$  чектелген болсун деп, түйүндөрдөгү туундунун каталыгын алабыз:

$$r_n(x) = R'(x) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

мында  $\xi$  — саны  $x_0, x_1, \dots, x_n$  түйүндөрүнүн арасындагы аралык маани.

$n = 2$  (түйүндөрдүн саны үчөө болгондо) үчүн эсептеп чыгалы. Бирдей аралыктагы түйүндөрдөгү Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнөн,  $n = 2$  болгондо төмөнкүнү алабыз:

$$L(x) = \frac{1}{2} y_0 (t-1)(t-2) - y_1 t(t-2) + \frac{1}{2} y_2 t(t-1).$$

Мындан,  $\frac{dx}{dt} = h$  эсепке алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f'(x) \approx L'(x) = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2} y_0 (2t-3) - y_1 (2t-2) + \frac{1}{2} y_2 (2t-1) \right].$$

Аны менен катар,

$$f'(x_i) = y'_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

туундулары үчүн туюнтмалары төмөнкү таблицанда келтирилген:



$i$	$t$	туундусу	каталыгы
$i = 0$	$t = 0$	$y'_0 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$ ,	$r_0 = \frac{1}{3}h^2 f'''(\xi_0)$ .
$i = 1$	$t = 1$	$y'_1 = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)$ ,	$r_1 = -\frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)$ .
$i = 2$	$t = 2$	$y'_2 = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$ ,	$r_2 = \frac{1}{3}h^2 f'''(\xi_2)$ .

#### 5.4. Аныкталбаган коэффициенттер методу.

Жогорудагыга окшош формулаларды түйүндөрдүн каалагандай жайгашкан учуру үчүн дагы алууга болот. Бул учурда Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн пайдаланганда, көп көлөмдөгү туюнтмаларды эсептөөгө алып келет, ошондуктан аныкталбаган коэффициенттер методун колдонуу ыңгайлуу. Ал төмөндөгүдөн турат.

Кээ бир  $x = x_i$  чекитинде  $k$ -чы тартиптеги туунду үчүн izdelүүчү туюнтма,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  түйүндөрүндөгү функциянын берилген маанилеринин сызыктуу комбинациясы көрүнүштө көрсөтүлөт:

$$y_i^k \approx c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n. \quad (5.8)$$

Бул катыштын так аткарылышы талап кылынат, эгерде  $y$  функциясы даражасы  $n$  ден чоң болбогон көп мүчө болуп саналса, б.а.

$$y = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n.$$

Мындан (5.8) катышы  $y = 1, y = x - x_0, \dots, y = (x - x_0)^n$  көп мүчөлөрү үчүн дагы так аткарылышы керектиги келип чыгат. Бул туюнтмаларды (5.8) катышына удаалаш коюп жана барабардыктардын так аткарылуусун талап кылып,  $c_0, c_1, \dots, c_n$  белгисиз коэффициенттерин аныктоо үчүн  $n+1$  сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын алабыз.

Мисал. Бирдей алыстатылган үч ( $n = 2$ ) түйүн учурунда,  $y'_i$  туундусу үчүн туюнтманы тапкыла.

Чыгаруу.  $n = 2$  болгондо (5.8) жакындатуу төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$y'_i \approx c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad (5.9)$$

Төмөнкү көп мүчөлөрдү пайдаланабыз

$$y = 1, y = x - x_0, y = (x - x_0)^2. \quad (5.10)$$

Алардын туундусун эсептейли:

$$y' = 0, y' = 1, y' = 2(x - x_0). \quad (5.11)$$

Барабардыктын так аткарылышын талап кылып,  $x = x_1$  болгондо (5.10) жана (5.11) катыштарын удаалаш тиешелүү (5.9) жакындатуунун оң жана сол жактарына коёлу:

$$0 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1,$$

$$1 = c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0),$$

$$2(x_1 - x_0) = c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2.$$

Жыйынтыгында төмөнкү көрүнүштөгү теңдемелер системасын алабыз

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0,$$

$$hc_1 + 2hc_2 = 1,$$

$$hc_1 + 4hc_2 = 2.$$

Бул теңдемелер системасын чечип төмөнкү маанилерди алабыз

$$c_0 = -\frac{1}{2h}, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2h}.$$

Бул маанилерди (5.9) коюп,  $y'_1$  туундусу үчүн туюнтманы тапкан болубуз

$$y'_1 \approx \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2).$$

Жогорку пункттагы таблицадагы мааниси менен салыштырып көрүп, дал келгендигин байкоого болот.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Таблицасы менен берилген функциянын  $x = 0.1$  чекитинде, биринчи жана экинчи туундусун эсептегиле:

$x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y$	1.2833	1.8107	2.3606	2.9577	3.5969	4.2833

2. Таблицасы менен берилген функциянын  $x = 0, 0.4, 1.0$  чекиттериндеги туундусун биринчи жана экинчи тартиптеги тактыкта эсептегиле:

$x$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y$	1.24	1.03	1.36	1.85	2.43	3.14

3.  $x = 1$  чекитинде, төмөнкү таблицасы менен берилген функциянын туундусунун жакындатылган маанисин эсептегиле:

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	6	-1	2	3

4. Кээ бир кесиндиде турактуу кадамы менен таблицада берилген функциянын туундусун эсептөөнүн алгоритмин жазгыла.
5. Бирдей алыстатылган төрт ( $n = 3$ ) түйүн учурунда,  $y_1'$  туундусу үчүн туюнтманы тапкыла.

## 6-ГЛАВА. САНДЫК ИНТЕГРАЛДОО МЕТОДДОРУ

### 6.1. Маселенин коюлушу.

Көпчүлүк практикалык маселелерди анык интегралдарды эсептөөгө алып келсе болот. Мисалы, фигуралардын аянттарын эсептөөдө, өзгөрүлмө күчтүн жумушун аныктоодо ж.б.

Анык интегралдарды эсептөөнүн эң эле ыңгайлуу эрежеси, Ньютон-Лейбництин формуласына негизделген:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (6.1)$$

мында  $F(x)$  – интеграл алдындагы  $f(x)$  функциясынын кандайдыр бир баштапкы функциясы (б.а.  $F'(x) = f(x)$ ).

Ньютон-Лейбництин формуласы мектептин алгебра жана анализдин башталышы курсунда талкууланып, анда анын колдонулуштары боюнча көптөгөн мисалдар каралган. Формула, математикалык анализде эң маанилүү ролго ээ. (6.1) формуласы кеңири чөйрөдөгү интегралдарды жеңил эсептөөгө мүмкүндүк берет. Бирок (6.1) формуласы,  $[a, b]$  кесиндиси боюнча каалагандай  $f(x)$  функциясынын интегралын табуунун жалпы эрежесин бербейт, б.а. ал, каралуучу маселени чыгаруунун алгоритми болбойт. Анткени, баштапкысын издеп табуу - бул, жетишээрлик татаал математикалык маселе болгондуктан, аны чечүү үчүн ачык көрүнүштөгү универсалдуу методдор жашабайт.

Мисал катары, төмөнкү эки интегралды карайлы:

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad 2. \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Биринчи учурда, интеграл алдындагы  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  функциянын баштапкысы  $F(x) = \arctg x$ , анда жыйынтыгында төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} = 0.785398163. \quad (6.2)$$

Бирок, экинчи учурда интегралды эсептөө үчүн мындай эреже жарабайт, себеби дегенде,  $f(x) = e^{-x}/x$  функциясынын баштапкысын элементардык функциялардын жардамында көрсөтүүгө болбойт. Ушул себептен, (6.1) формула боюнча анык интегралды эсептөө практикада ишке ашпай калат.

Дагы бир себеби,  $f(x)$  функциясынын мааниси фиксирленген  $x_i$  чекиттеринин көптүгүндө гана берилген болот, б.а. функция таблицасы менен берилет. Бул учурда, «баштапкы» түшүнүгү маңызын жоготот.

Ошондуктан анык интегралды эсептөөдө, жакындатылган жана биринчи кезекте сандык интегралдоо методдору негизги мааниге ээ.

Функцияны сандык интегралдоо маселеси интеграл алдындагы функциянын бир катар маанилеринин негизинде анык интегралдын маанисин эсептөөдөн турат.

Бир эселүү интегралды сандык эсептөө механикалык квадратура, эки эселүү - механикалык кубатура деп аталат. Ал эми тиешелүү формулаларын квадратуралык жана кубатуралык формула деп айтабыз. Биз адегенде, бир эселүү интегралдын сандык эсептөөсүнө токтолобуз. Андан кийин өздүк эмес интегралдарды жакындатып эсептөөнү карайбыз. Ал эми эселүү интегралдарга байланыштуу маселелерди чыгаруу, жыйынтыгында анык интегралдарды эсептөөгө алынып келинишин көрсөтөбүз.

Механикалык квадратуранын жөнөкөй ыкмасы же жогорудагы эки учурга тең болгон универсалдуу методдору болуп, интеграл алдындагы функцияны интерполяциялык көп мүчөлөрдүн жардамында аппроксимациялоого негизделген, сандык интегралдоо методдору эсептелет. Мындай аппроксимациялоо анык интегралды интегралдык сумма менен жакындатылган түрдө алмаштырат. Эсептөө ыгына карап, ар түрдүү сандык интегралдоо методдору (квадратуралык формулалар) пайда болгон:

- Тик бурчтуктар методу;
- Трапещия методу;
- Парабола методу (Симпсондун методу);
- Чебышевдин квадратуралык формуласы ж.б.

### 6.1.2. Анык интеграл түшүнүгү.

Айталы,  $y = f(x)$  функциясы  $[a, b]$  кесиндисинде берилсин.  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  чекиттеринин жардамында  $[a, b]$  кесиндисин  $n$  жөнөкөй  $[x_{i-1}, x_i], (i = 1, 2, \dots, n)$  кесиндилерге бөлүп чыгабыз. Ар бир бөлүкчө кесиндилерден каалагандай  $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$  чекиттерин тандап, бул чекиттердеги  $f(\xi_i)$  функциясынын маанисин  $[x_{i-1}, x_i]$  бөлүкчө кесиндилеринин  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  узундугуна болгон көбөйтүндүлөрүн табалы:

$$f(\xi_i)\Delta x_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

Мындай көбөйтүндүлөрдүн суммасын түзөбүз:

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (6.4)$$

Бул сумма  $f(x)$  функциясы үчүн,  $[a, b]$  кесиндисиндеги интегралдык сумма деп аталат.

**Аныктама.** Эгерде интегралдык сумманын бөлүкчө кесиндилердин узундуктарынын эң чоңу нөлгө умтулгандагы предели жашап, бөлүү чекиттеринен жана  $\xi_i$  чекиттерин тандап алуудан көз каранды болбосо, анда бул предел  $f(x)$  функциясынан,  $[a, b]$  кесиндиси боюнча алынган анык интегралы деп аталып:

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

же

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (6.5)$$

түрүндө белгиленет.

Мисал катары,  $[a, b]$  кесиндисинде турактуу санга барабар болгон функцияны карайлы:  $f(x) = C$ . Кесиндини кандайдыр бир жөнөкөй кесиндилерге бөлүп чыгып, бөлүкчө кесиндилерден  $\xi_i$  чекиттерин тандап, интегралдык сумма түзөлү

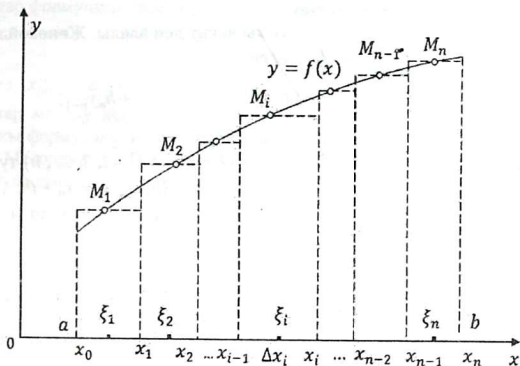
$$I(x_i, \xi_i) = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C(-x_0 + x_n) = C(b - a).$$

Көрүнүп тургандай ал, кесиндилерди бөлүүдөн жана  $\xi_i$  чекиттерин тандоодон көз каранды эмес экен. Демек, ошол эле чондукка барабар болгон, интегралдык сумманын предели жашайт:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b C dx = C(b - a).$$

Биз турактуу санга барабар болгон функция, интегралдануучу экендигин далилдедик жана ага тийиштүү интегралын эсептедик.

$f(x) > 0$  болгондогу учур үчүн, жогоруда кийирилген түшүнүктөрдүн геометриялык түшүндүрмөсү төмөнкү чиймеде (6.1-сүрөт) чагылдырылган.



6.1-сүрөт.

Мында  $M_i$  чекиттеринин абсциссасы  $\xi_i$  чекиттери, ординатасы  $f(\xi_i)$  функциясынын маанилери болот.  $i = 1, 2, \dots, n$  үчүн (6.3) туюнтма элементардык тик бурчтуктардын (штрихтелген сызыктар) аянтын, бул тик бурчтуктардын аянттарынан түзүлгөн фигуранын аянты (6.4) интегралдык сумманы билдирет.  $[a, b]$  кесиндисин бөлүү чекиттеринин санын көбөйткөндө жана бардык  $\Delta x_i$  элементтери нөлгө умтулганда, фигуранын (сынык сызыктар) жогорку чеги  $y = f(x)$  сызыгына өтөт. Алынган фигуранын аянты ийри сызыктуу трапеция деп аталып, (6.5) анык интегралга барабар болот.

## 6.2. Сандык интегралдоо алгоритмдери.

### 6.2.1. Тик бурчтуктар методу.

Сандык интегралдоо методдорунун эң жөнөкөйү болуп, тик бурчтуктар методу эсептелет. Бул метод анык интегралды (6.4) интегралдык суммага алмаштырууга негизделген, б.а.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (6.6)$$

мында  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Каалагандай  $\xi_i$  чекитин бөлүкчө кесиндилерден тандап алуунун үч жолу бар.

1.  $\xi_i = x_{i-1}$ , б. а. сол жактагы чекит деп алалы. Жөнөкөйлүк үчүн  $f(\xi_i) = y_i$ ,  $\Delta x_i = h_i$  деп белгилеп

$$\int_a^b f(x) dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1},$$

сол тик бурчтуктар формуласын алабыз.

Эгерде  $[a, b]$  кесиндисин  $h_i = h = \text{const}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) турактуу кадамы менен  $a = x_0$ ,  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ , ...,  $x_i = x_0 + ih$ , ...,  $x_n = x_0 + nh$  чекиттери аркылуу барабар  $n$  бөлүккө бөлсөк, анда

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

формуласына ээ болобуз. Бул формула, чекиттер бирдей алыстатылган учурдагы *сол тик бурчтуктар формуласы* деп аталат.

2.  $\xi_i = x_i$ , б.а. оң жактагы чекитке барабар болсун деп, (6.6) формуласынан:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n,$$

оң тик бурчтуктар формуласын алабыз.

Жогорудагыдай эле, оң тик бурчтуктар формуласын бирдей алыстатылган чекиттер үчүн жазууга болот:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Сол тик бурчтуктар формуласы интегралдын кеми менен алынган, ал эми оң тик бурчтуктар формуласы интегралдын ашыгы менен алынган жакындатылган маанилерин берет.

Элементардык бөлүкчө кесиндилердин орто чекитин функциянын мааниси катары кабыл алган, тагыраак жана өтө кеңири таралган орто тик бурчтуктар формуласынын көрүнүшү эсептелет:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-1/2}), \quad (6.7)$$

мында  $x_{i-1/2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2} = a + h_i(i-1/2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Айталы,  $[a, b]$  кесиндиси  $h_i = h = (b-a)/n$  узундуктагы, барабар  $n$  бөлүккө бөлүнгөн болсун жана  $x_{i-1/2}$  чекиттери катары тиешелүү кесиндилердин орто чекиттери тандалсын:  $x_{i-1/2} = a + h(i-1/2)$ ,

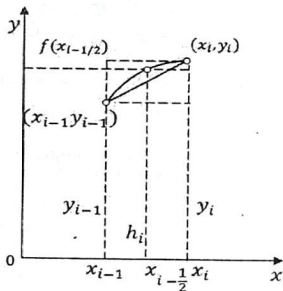


$i = 1, 2, \dots, n$ . Анда бирдей алыстатылган чекиттерде орто тик бурчтуктар формуласы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx I_n = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2}), \quad (6.8)$$

мында  $x_{i-1/2} = a + h(i-1/2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Мындан кийин тик бурчтуктар методу дегенде, так эле орто тик бурчтуктар методун же акыркы формуланы түшүнөбүз.

Методдун тик бурчтуктар деп аталып калышынын себеби, (6.8) формуласынын геометриялык түшүндүрмөсүнө байланыштуу, 6.2-сүрөт.



6.2-сүрөт. Тик бурчтуктар жана трапещия методу.

Түшүнүктүү болсун үчүн, биринчи пункттагы эки интегралга кайрылалы. Алардын биринчиси  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча (6.2) де эсептелинген болчу. Ал интегралды  $[0, 1]$  кесиндисин барабар  $n = 10$  бөлүккө бөлүп, (6.8) тик бурчтуктар формуласы боюнча эсептейли.

Төмөнкү таблицата интеграл алдындагы  $f(x) = 1/(1+x^2)$  функциянын маанилери  $x_{i-1/2} = 0 + h(i-1/2)$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) чекиттеринде эсептелинген,  $h = (b-a)/n = 0.1$ :

$i$	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$
1	0.05	0.997506234
2	0.15	0.977995110
3	0.25	0.941176471
4	0.35	0.890868597
5	0.45	0.831600832
6	0.55	0.767754319
7	0.65	0.702987698
8	0.75	0.640000000
9	0.85	0.580551524
10	0.95	0.525624179

Таблицанын үчүнчү мамычасындагы функциянын маанилерин кошуп, алынган сумманы  $h = 0.1$  ге көбөйтүп, тик бурчтуктар формуласы боюнча интегралдын жакындатылган маанисин алабыз, б.а.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx I_{10} = 0.1 \cdot (0.997506234 + 0.977995110 + \\
 &+ 0.941176471 + 0.890868597 + 0.831600832 + 0.767754319 + \\
 &+ 0.702987698 + 0.64 + 0.580551524 + 0.525624179) = \\
 &= 0.1 \cdot 7.856064963 = 0.785606496.
 \end{aligned}$$

Интегралды эсептегендеги кетирилген каталык  $\Delta I_{10} = J - I_{10} = -0.000208333$ , б.а. 0.02% түзөт.

Эми, экинчи интегралды карайлы:  $J = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$ . Бул интегралды

Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча эсептөөгө болбойт, бирок тик бурчтуктар формуласы боюнча жеңил эсептөөгө болот.

Интеграл алдындагы  $f(x) = e^{-x}/x$  функциянын,  $x_{i-1/2} = 1 + h(i-1/2)$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) чекиттериндеги маанилери төмөнкү таблицада берилген,  $n = 10$ ,  $h = (2-1)/10 = 0.1$ :

$i$	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$
1	1.05	0.333274047
2	1.15	0.275336321
3	1.25	0.229203837
4	1.35	0.192029823
5	1.45	0.161772612
6	1.55	0.136934177
7	1.65	0.116393884
8	1.75	0.099299396
9	1.85	0.084993063
10	1.95	0.072961062

Тик бурчтуктар формуласы боюнча эсептеп интегралдын жакында-  
тылган маанисин алабыз, б.а.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx \approx I_{10} = 0.1 \cdot (0.333274047 + 0.275336321 + \\
 &+ 0.229203837 + 0.192029823 + 0.161772612 + 0.136934177 + \\
 &+ 0.116393884 + 0.099299396 + 0.084993063 + 0.072961062) = \\
 &= 0.1 \cdot 1.702198223 = 0.170219822.
 \end{aligned}$$

Эгерде функция таблицанда берилсе, берилген чекиттердин көптүгү менен гана чектелебиз. Бул учурда берилген тактыкка, колдонулуучу интерполяциялык көп мүчөлөрдүн даражасын көтөрүү менен жетебиз. Кийинки пункттарда ушундай сандык интегралдоо ыкмаларын карайбыз.

### 6.2.2. Ньютон-Котэстин квадратуралык формулалары.

Ньютон-Котэстин формуласы, интеграл алдындагы функцияны чекиттер бирдей алыстатылган учурдагы Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнө алмаштыруу жолу менен алынат.

Алынуучу формула интеграл алдындагы функциянын интерполяция түйүндөрүндөгү маанисин колдонуп жана түйүндөрдүн санынан көз каранды болгон кээ бир даражадагы бардык көп мүчөлөр үчүн так болот. Интерполяциялык көп мүчөнүн даражасы чоңоюшу менен формуланын тактыгы өсөт.

Айталы, берилген  $y = f(x)$  функциясы үчүн

$$\int_a^b f(x) dx$$

интегралын эсептөө талап кылынсын.

Кадамды тандап

$$h = \frac{b-a}{n},$$

$[a, b]$  кесиндисин  $x_0 = a, x_i = x_0 + ih$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $x_n = b$  бирдей алыстатылган чекиттердин жардамында барабар  $n$  белүккө бөлөлү жана бул чекиттерде

$$y_i = f(x_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

маанилери белгилүү болсун.

$f(x)$  функциясын тиешелүү  $L(x)$  Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнө алмаштырып, жакындатылган квадратуралык формула алабыз:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n y_i A_i, \quad (6.9)$$

мында  $A_i$  – кээ бир турактуу коэффициенттер. Бул формуладагы  $A_i$  коэффициенттери үчүн айкын туюнтмаларын келтирип чыгаралы.

Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн ((4.8) формуласын кара) жазалы:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}.$$

Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүн бирдей алыстатылган чекиттердин жардамында ((5.6) формуланы кара) жазууга болот:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t^{[n+1]}}{t-i} \quad (6.10)$$

мында  $t = (x-x_0)/h$ ,  $t^{[n+1]} = t(t-1)(t-2) \dots (t-n)$ .

(6.9) формуладагы  $f(x)$  функциясын тиешелүү бирдей алыстатылган чекиттердеги  $L(x)$  Лагранждын интерполяциялык көп мүчөсүнө алмаштырып, (6.10) формуланын негизинде төмөнкүнү алабыз:

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t^{[n+1]}}{t-i} dx$$

мында  $t = (x-x_0)/h$ ,  $dt = dx/h$  болгондуктан, анда интегралда өзгөрмөлөрдү алмаштырып төмөнкүгө ээ болобуз:

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-i} dt = (b-a) H_i, \quad (6.11)$$

мында

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^1 t^{[n+1]} dt, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (6.12)$$

-турактуулары, *Котестин коэффициенттери* деп аталышат. Көрүнүп тургандай, Котестин коэффициенттери  $f(x)$  функциясынан көз каранды эмес экен, бир гана бөлүү чекиттери болгон  $n$  санынан көз каранды. Жыйынтыгында, (6.9) жана (6.11) формулаларын эсепке алып, төмөнкү көрүнүштөгү Ньютон-Котестин квадратуралык формулаларын алабыз:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n f(x_i) H_i. \quad (6.13)$$

### 6.2.3. Трапециянын формуласы.

Көтөстүн коэффициенттеринен  $n=1$  болгон учурда төмөнкүнү алабыз ( $i=0, 1$ ):

$$H_0 = - \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2},$$

$$H_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Анда (6.13) формуласы боюнча  $[x_0, x_1]$  кесиндисинде төмөнкүгө ээ болобуз

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx (x_1 - x_0) (H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1)) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

же

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)). \quad (6.14)$$

Биз, анык интегралды жакындатып эсептөө үчүн белгилүү болгон трапеция формуласын алдык. Бул формуланы жалпы  $[a, b]$  кесиндиси үчүн жайылталы. Ал үчүн  $[a, b]$  кесиндисин барабар  $n$  бөлүккө бөлүп  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , ар бир бөлүкчө кесиндиге (6.14) трапециянын формуласын колдонсок, анда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{2} (f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

же

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx T_n = h \cdot \left( \frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right), \quad (6.15)$$

б.а. жалпы  $[a, b]$  кесиндиси үчүн трапециянын формуласын алдык.

Бул учурда бөлүкчө түз сызыктуу трапециялардын аянттары жакындатылып кошулуп, фигуранын жалпы аянтын берет, б.а. геометриялык жактан (6.15) формуласы интеграл алдындагы  $y = f(x)$  функциясынын графигин сынык сызыктарга алмаштыруунун натыйжасында желип чыгат (6.2-сүрөт).

**Мисал.**  $[0, 1]$  кесиндисин барабар  $n=10$  бөлүккө бөлүп, трапециянын формуласын колдонуп

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

интегралын эсептегиле,  $h = 0,1$ .

Чыгаруу. Интеграл алдындагы  $f(x) = 1/(1+x^2)$  функциянын  $x_i = a + i \cdot h$  чекиттериндеги маанилери төмөнкү таблицанын үчүнчү мамычасында эсептелинген.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	0.0	1.000000000
1	0.1	0.990099010
2	0.2	0.961538462
3	0.3	0.917431193
4	0.4	0.862068966
5	0.5	0.800000000
6	0.6	0.735294118
7	0.7	0.671140940
8	0.8	0.609756098
9	0.9	0.552486188
10	1.0	0.500000000

(6.15) трапециянын формуласы боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned}
 J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx T_{10} = 0.1 \cdot \left( \frac{1}{2} + 0.990099010 + 0.961538462 + 0.917431193 + \right. \\
 &+ 0.862068966 + 0.8 + 0.735294118 + 0.671140940 + \\
 &+ 0.609756098 + 0.552486188 + \left. \frac{0.5}{2} \right) = \\
 &= 0.1 \cdot 7.849814972 = 0.784981497.
 \end{aligned}$$

Интегралды эсептөөдөгү каталык  $\Delta T_{10} = J - T_{10} = 0.00042$  түзөт (0.04% тегерегинде).

Мисал.  $[0, 1]$  кесиндисин барабар  $n = 10$  бөлүккө бөлүп, трапециянын формуласын колдонуп

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$$

интегралын эсептегиле.

Чыгаруу. Интеграл алдындагы  $f(x) = e^{-x}/x$  функциянын  $x_i = a + i \cdot h$  чекиттериндеги маанилери төмөнкү таблицанын үчүнчү мамычасында эсептелинген.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	1.0	0.367879441
1	1.1	0.302610076
2	1.2	0.250995177
3	1.3	0.209639841
4	1.4	0.176140689
5	1.5	0.148753440
6	1.6	0.126185324
7	1.7	0.107460897
8	1.8	0.091832716
9	1.9	0.078720326
10	2.0	0.067667642

(6.15) трапециянын формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx \approx T_{10} = 0.1 \cdot \left( \frac{0.367879441}{2} + 0.302610076 + 0.250995177 + \right. \\
 &\quad + 0.209639841 + 0.176140689 + 0.148753440 + 0.126185324 + \\
 &\quad \left. + 0.107460897 + 0.091832716 + 0.078720326 + \frac{0.067667642}{2} \right) = \\
 &= 0.1 \cdot 1.710112025 = 0.171011203.
 \end{aligned}$$

#### 6.2.4. Симпсондун формуласы.

$n = 2$  болгон учурда (6.12) формуласынан удаалаш төмөнкүгө ээ болобуз ( $i = 0, 1, 2$ ):

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1} dt = -\frac{1}{2} \int_0^2 (t^2 - 2t) dt = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-2} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (t^2 - t) dt = \frac{1}{6}.$$

Анда (6.13) формуласын эсепке алып,  $[x_0, x_2]$  кесиндисинде төмөнкүнү алабыз:

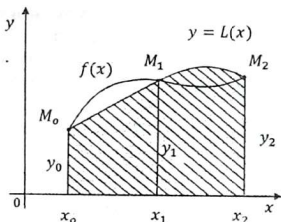
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx (x_2 - x_0) \sum_{i=0}^2 f(x_i) H_i = 2h \left( \frac{1}{6} f(x_0) + \frac{2}{3} f(x_1) + \frac{1}{6} f(x_2) \right)$$

же



$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)). \quad (6.16)$$

Геометриялык жактан бул формула берилген  $y = f(x)$  ийриси  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$  жана  $M_2(x_2, y_2)$  үч чекити аркылуу өтүүчү  $y = L(x)$  параболасына алмаштыруунун натыйжасында алынат (6.3-сүрөт).



6.3-сүрөт.

(6.16) формуласынан жогорудагыдай эле, бардык  $[a, b]$  кесиндиси боюнча интегралды жакындатып эсептөө үчүн формула алууга болот. Ал үчүн  $n = 2m$  деп алып,  $[a, b]$  кесиндисин, узундугу  $2h$  болгон бөлүкчө кесиндилерге бөлүп  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ , ...,  $[x_{2m-2}, x_{2m}]$ , ар бири эки эсеге чоңойтулган бөлүкчө кесиндилерге (6.16) формуланы колдонолу:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)),$$

$$\dots$$

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})).$$

Барабардыктардын сол жана оң жактарын өз-өзүнчө кошуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{h}{3} [(f(a) + f(b)) + 4 \cdot (f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2m-1})) + 2 \cdot (f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2m-2}))]. \quad (6.17)$$

Бул формула Симпсондун формуласы же парабола формуласы деп аталат.

Формуладан көрүнүп тургандай,  $f(x)$  функциясынын маанилери так номердеги  $x_1, x_3, \dots, x_{2m-1}$  бөлүү чекиттеринде 4 коэффициенттери менен кирген, жуп номердегилерде  $x_2, x_4, \dots, x_{2m-2}$  — 2 коэффициенттери менен, жана эки четки  $x_0 = a$  жана  $x_n = b$  чекиттеринде 1 коэффициенттери менен кирген.

Бөлүкчө кесиндилердин саны бирдей болгон учурда, тик бурчтуктар жана трапециянын формулаларына караганда, Симпсондун формуласы жакшы жыйынтык берет. Ошондуктан, көбүрөөк сандагы эсептөөлөрдү талап кылгандыгына карабастан, Симпсондун формуласын колдонууга аракет кылышат.

**Мисал.**  $[0, 1]$  кесиндиси барбар  $n = 10$  бөлүккө бөлүп, Симпсондун формуласын колдонуп

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

интегралын эсептегиле,  $h = 0,1$ .

Чыгаруу. Интеграл алдындагы  $f(x) = 1/(1+x^2)$  функциянын  $x_i = a + i \cdot h$  чекиттериндеги маанилери төмөнкү таблицанын үчүнчү мамычасында эсептелинген.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	0.0	1.000000000
1	0.1	0.990099010
2	0.2	0.961538462
3	0.3	0.917431193
4	0.4	0.862068966
5	0.5	0.800000000
6	0.6	0.735294118
7	0.7	0.671140940
8	0.8	0.609756098
9	0.9	0.552486188
10	1.0	0.500000000

Симпсондун формуласы боюнча эсептеп, төмөнкүнү алабыз:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx S_{10} = \frac{0.1}{3} \cdot [(1+0.5) + 4 \cdot (0.990099010 + 0.917431193 + 0.8 + 0.671140940 + 0.552486188) + 2 \cdot (0.961538462 + 0.862068966 + 0.735294118 + 0.609756098)] =$$

$$= \frac{0.1}{3} \cdot 23.561944605 = 0.785398153.$$

Биз атайын маселенин коюлушунда, алынган жыйынтыктын тактыгын (формулардын тактыгын кийинки пунктта карайбыз) жеңил баалоо үчүн, так чечими белгилүү болгон (6.2) интегралды тандап алганбыз. Тик бурчтуктар жана трапеция формулалары менен интегралды эсептегендеги каталык менен Симпсондун формуласы боюнча эсептелген каталыкты салыштырып көрөлү:

$$\Delta I_{10} = J - I_{10} = -0.000208333,$$

$$\Delta T_{10} = J - T_{10} = 0.000416666,$$

$$\Delta S_{10} = J - S_{10} = 0.00000001.$$

Симпсондун формуласынын каталыгы, биз күткөндөй эң аз экен. Мында салыштырмалуу каталык, тик бурчтуктар методун колдонгон учурда - 0.03%, трапециянын формуласын колдонгондо - 0.06%, ал эми Симпсондун формуласын колдонгон учурда 0.000002% түзүп, жокко эсе экен.

Мисал.  $[0, 1]$  кесиндисин барабар  $n = 10$  бөлүккө бөлүп, Симпсондун формуласын колдонуп

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$$

интегралын эсептегиле,  $h = 0,1$ .

Чыгаруу. Берилген интегралды трапециянын формуласы боюнча эсептегенде, интеграл алдындагы  $f(x) = 1/(1+x^2)$  функциянын  $x_i = a + i \cdot h$  чекиттериндеги маанилерин алганбыз. Ал таблицанын үчүнчү мамычасынан пайдаланып, (6.17) Симпсондун формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx \approx S_{10} = \frac{1}{30} \cdot [(0.367879441 + 0.0.67667642) + 4 \cdot (0.302610076 + \\ &+ 0.209639841 + 0.148753440 + 0.107460897 + 0.078720326) + \\ &+ 2 \cdot (0.250995177 + 0.176140689 + 0.126185324 + 0.0911832716)] = \\ &= \frac{1}{30} \cdot 5.114593209 = 0.170486440. \end{aligned}$$

Биз Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча эсептей албаган  $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$  интегралды, тик бурчтуктар, трапециянын жана Симпсондун формулалары боюнча эсептеп, алынган жыйынтыктын каталыгы туу-

ралуу азырынча эч нерсе айта алган жокпуз. Ошондуктан, ал формулалардын каталыгы тууралуу маселеге токтололу.

### 6.3. Сандык интегралдоо формулаларынын тактыгы жөнүндө.

1. Тик бурчтуктар формуласынын калдык мүчөсү. Эгерде  $f(x)$  функциясы  $[a, b]$  кесиндисинде интегралдануучу болсо, анда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = J = \int_a^b f(x) dx.$$

Ага ылайык  $J$  интегралы үчүн туюнтманы төмөнкү көрүнүштө жазууга болот

$$J = I_n + R_n, \text{ анын үстүнө } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Биз тик бурчтуктар формуласын,  $R_n$  чоңдугун эсепке албастан  $J$  интегралын эсептөө үчүн жакындатылган формула б.а. (6.8) формуланы алганбыз.

Айталы,  $f(x)$  функциясы  $[a, b]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз экинчи туундуга ээ болсун. Анда  $[a, b]$  кесиндисинде ушундай бир  $x_n^*$  чекити жашап, (6.8) формуласынын каталыгын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот

$$R_n = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(x_n^*). \quad (6.18)$$

Бул формуланын негизги өзгөчөлүгү, бизге тиешелүү  $x_n^*$  чекитинин жашашы гарантияланган, бирок анын турган абалы жөнүндө эч нерсе белгисиз. Ошондуктан, (6.18) формуласы  $R_n$  ди эсептөөгө мүмкүндүк бербейт, бирок аны баалоого мүмкүндүк берет:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} M_2, \quad (6.19)$$

мында  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

Мисал катары,  $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$  интегралды карайлы. Интеграл алдындагы

$f(x) = e^{-x}/x$  функциядан эки жолу туунду алалы:

$$f'(x) = -e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right).$$

[1, 2] кесиндиде  $f''(x) > 0$  жана  $\max_{1 \leq x \leq 2} |f''(x)| = 1.839397 < 2$  болгондуктан, (6.19) формуласы боюнча төмөнкү баалоону алабыз:

$$|R_{10}| \leq \frac{0.1^2 \cdot 2}{24} = 0.000833333.$$

Алынган баалоо боюнча, 6.2.1. пунктунда тик бурчтуктар формуласы менен жакындатылып эсептелген жыйынтыкты:

$$J = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx \approx I_{10} = 0.170219822$$

тегеректеп, төмөнкү акыркы жыйынтыкка келебиз:

$$J = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx = 0.1702 \pm 0.0009.$$

**2. Трапециянын формуласынын калдык мүчөсү.** (6.14) квадратуралык формуласы боюнча интегралдын маанисин жакындатып эсептөөдөгү каталыкты

$$R = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

аркылуу белгилейли. Ал бөлүү кадамынан көз каранды болот б.а.  $R = R(h)$ , анда

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx - \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0 + h)]$$

Айталы  $f(x) \in C^2[x_0, x_1]$  болсун деп, каталык үчүн формула келтирип чыгаралы. Акыркы формуланын эки жагынан  $h$  боюнча эки жолу удаалаш туунду алалы:

$$\begin{aligned} R'(h) &= f(x_0 + h) - \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h}{2} f'(x_0 + h) = \\ &= \frac{1}{2}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f'(x_0 + h) \end{aligned}$$

жана

$$R''(h) = \frac{1}{2} f'(x_0 + h) - \frac{1}{2} f'(x_0 + h) - \frac{h}{2} f''(x_0 + h) = -\frac{h}{2} f''(x_0 + h),$$

анын үстүнө  $R(0) = 0$ ,  $R'(0) = 0$ .

Демек,

$$R''(h) = \frac{h}{2} f''(x_0 + h). \quad (6.20)$$

Төмөнкү теореманы эске салалы [4].

**Теорема.** (Интегралдын орточо мааниси жөнүндөгү жалпыланган теорема) Эгерде  $f(x)$  функциясы  $[a, b]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда бул кесиндиден кандайдыр бир  $\xi$  чекити табылып

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

барбардыгы орун алат.

(6.20) нын эки жагын  $h$  боюнча 0 дөн  $h$  ка чейин интегралдап жана орточо маани жөнүндөгү теореманы колдонуп, төмөнкүгө ээ болубуз:

$$R'(h) - R'(0) = -\frac{1}{2} \int_0^h f''(x_0 + t) dt = -\frac{1}{2} f''(\xi_1) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} f''(\xi_1),$$

$$R'(h) = R'(0) - \frac{h^2}{4} f''(\xi_1),$$

мында  $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ .

Дагы бир жолу интегралдайбыз:

$$R(h) = R(0) + R'(0)h = -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 f''(\xi_1) dt =$$

$$= R(0) + R'(0)h - \frac{1}{4} f''(\xi) \int_0^h t^2 dt = R(0) + R'(0)h - \frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

мында  $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ ,  $R(0) = 0$ ,  $R'(0) = 0$ .

Демек,

$$R(h) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

мында  $\xi \in (x_0, x_0 + h)$ .

Мындай туюнтмалардын баардыгын, бардык  $(x_{i-1}, x_i)$  бөлүкчө кесиндилер үчүн суммалап, жалпы  $R_T$  каталыгы үчүн туюнтма алабыз:

$$R_T = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i), \quad (6.21)$$

мында  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ .

Экинчи туундунун арифметикалык орточосун  $\mu$  аркылуу белгилейли:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i). \quad (6.22)$$

Мында  $\mu$ ,  $f$  функциясынын экинчи туундусунун  $[a, b]$  кесиндисиндеги эң кичине  $m_2$  жана эң чоң  $M_2$  маанилеринин ортосунда камалган, б.а.

$$m_2 \leq \mu \leq M_2.$$

$f$  функциясынын экинчи туундусу  $[a, b]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал  $[a, b]$  кесиндисиндеги өзүнүн маанилери катары  $m_2$  жана  $M_2$  нин ортосундагы бардык аралык сандарды кабыл алат. Мындан, жок дегенде  $\xi \in [a, b]$  чекити табылып

$$\mu = f''(\xi)$$

болот. Анда (6.22) формуласынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = nf''(\xi).$$

Андыктан, калдык мүчө үчүн формула алабыз

$$R_T = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{b-a}{n} \cdot \frac{h^2 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi),$$

мында  $\xi \in [a, b]$ .

**Теорема.** Эгерде  $f$  функциясынын экинчи туундусу  $[a, b]$  кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда (6.15) квадратуралык формуласы үчүн

$$|R_T| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2, \quad (6.23)$$

барабарсыздыгы орун алат, мында  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

Жогоруда каралган мисал үчүн, бул учурда дагы (6.23) формуласы боюнча баалоо алууга болот.

(6.19) жана (6.23) калдык мүчөлөрүнүн туюнтмалары көрсөтүп тургандай, тиешелүү тик бурчтуктар жана трапециянын формулалары интегралдын так маанисин берет, качан гана  $f(x)$  сызыктуу функция болсо, анткени анда  $f''(x) \equiv 0$  болот.

**3. Симпсондун формуласынын каталыгы.** Симпсон формуласынын калдык мүчөсү, (6.16) формула боюнча

$$R = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

барабар. Айталы,  $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$  болсун деп алып, трапеция формуласы үчүн алынганга окшош эле  $R_S$  үчүн, б.а. Симпсон формуласы-

нын калдык мүчөсүнө дагы жөнөкөй туюнтма келтирип чыгарууга болот [4]:

$$R_{S_n} = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\xi), \quad (6.24)$$

мында  $\xi \in [a, b]$ . Бул туюнтма көрсөтүп тургандай, интегралды жакындатып эсептөө үчүн (6.17) Симпсондун формуласы так маанини берет, качан гана  $f(x)$  функциясы үчүнчү же андан төмөн даражадагы көп мүчө болсо, анткени анда  $f^{IV}(x) \equiv 0$  болот.

Эгерде  $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|$  аркылуу  $f(x)$  функциясынын төртүнчү туундусунун модулуна максимумун белгилесек, анда

$$|R_{S_n}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4, \quad (6.25)$$

барабарсыздыгы орун алат.

Мисал катары дагы бир жолу,  $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$  интегралды карайлы. Ин-

теграл алдындагы  $f(x) = e^{-x}/x$  функциясынан төрт жолу туунду алып төмөнкүнү алабыз:

$$f^{IV}(x) = e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{24}{x^4} + \frac{24}{x^5} \right).$$

Интегралдоо кесиндисинде  $f^{IV}(x) > 0$  жана  $\max_{1 \leq x \leq 2} |f^{IV}(x)| = 23.912164$

$< 24$  болот. Демек,  $S_{10}$  мааниси  $J = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$  интегралынын маанисин

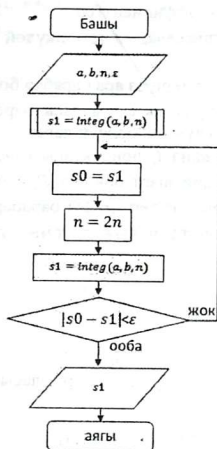
ашыгы менен берет, себеби  $R_{S_{10}} < 0$ , ал эми каталыктын чоңдугу үчүн (6.25) формуласы боюнча төмөнкү баалоону алабыз:

$$|R_{S_{10}}| \leq \frac{0.1^4 \cdot 24}{180} = 0.000013333.$$

Тик бурчтуктар жана трапеция методдорун Симпсон методу менен салыштырып, белгилеп айта турган болсок, булардын акыркысы жогорку - төртүнчү тартиптеги тактыкка, ал эми тик бурчтуктар жана трапеция методдору - экинчи тартиптеги тактыкка ээ. Сандык интегралдоонун түрдүү методдорун карап, алардын татыктуусун жана кемчилигин салыштыруу кыйын. Кандай гана салыштыруу кылбайлы, бизге альтернативдик суроо коюлат:  $h^2 f''$  же  $h^4 f^{IV}$  тин кайсынысы



чоң деген. Бардыгы,  $y = f(x)$  функциясынан жана анын туундусунан көз каранды.



6.4-сүрөт. Интегралды берилген тактыкта эсептөөнүн алгоритми.

**Интегралды берилген тактыкта эсептөө.** Жогорку пунктка белгилеп өткөндөй, бөлүкчө кесиндилердин саны бирдей болгондо, тик бурчтуктар жана трапециянын формулаларына караганда, Симпсондун формуласы көпчүлүк учурларда тагыраак. Интегралды берилген тактыгы менен эсептөөнүн алгоритми 6.4-сүрөттө келтирилген. Мында,  $\text{integ}(a, b, n) - \epsilon$  тактыгы менен жогоруда келтирилген методдордун биринде  $a$  дан  $b$  га чейинки аралыкта интегралдын маанисин эсептөөчү функция;  $n$  – интегралдоо аралыгын бөлүү чекиттеринин саны.

#### 6.4. Чебышевдин квадратуралык формуласы.

Айталы  $f(t)$  функциясы  $[-1, 1]$  кесиндисинде берилсин. Интеграл үчүн төмөнкү көрүнүштөгү квадратуралык формуланы издейли:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n B_i f(t_i), \quad (6.26)$$

мында  $B_i$  – турактуу коэффициенттер.

Чебышев  $t_i$  абсциссаларын төмөнкүдөй эки шарт менен тандап алууну сунуштаган:

1.  $B_i$  коэффициенттери өз ара барабар болушсун;

2. (6.26) квадратуралык формуласы бардык  $n$  ге чейинки даражадагы көп мүчөлөр үчүн так болсун деген.

Бул учурда  $B_i$  жана  $t_i$  чоңдуктары кандайча табыла тургандыгын көрсөтөлү. Биринчи шарт боюнча  $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$  барабарлап жана  $f(t) \equiv 1$  деп эсептеп, (6.26) барабардыгынын бул функция үчүн так аткарылышын талап кылып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_{-1}^1 dt = \sum_{i=1}^n B_i,$$

мындан

$$B = \frac{2}{n}.$$

Анда Чебышевдин квадратуралык формуласы төмөнкүдөй көрүнүшкө келет:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i), \quad (6.27)$$

Эми  $t_i$  абсциссаларын аныктоо үчүн (6.27) формуласы, экинчи шарт боюнча төмөнкү көрүнүштөгү көп мүчө үчүн дагы так болот:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n.$$

Анда (6.27) формуласы төмөнкүдөй жазылат

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots + a_n t_i^n). \quad (6.28)$$

Каалагандай  $a_0, a_1, \dots, a_n$  үчүн (6.28) барабардыгы туура болуш керек. Ошондуктан, барабардыктын оң жана сол жактарындагы алардын коэффициенттери бири-бири менен дал келиш керек.

Барабардыктын сол жагындагы интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) dt &= \left[ a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right]_{-1}^1 = \\ &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} - (-a_0 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} (-1)^{n+1}). \end{aligned}$$

Анда тиешелүү коэффициенттерин бири-бирине барабарлап, төмөнкү теңдемелер системасын алабыз

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3}, \\ t_1^3 + t_2^3 + \dots + t_n^3 = 0, \\ \dots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = \frac{n[1 - (-1)^{n+1}]}{2(n+1)}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Алынган системадагы теңдемелердин сол жагы өзүнүн  $t_1, t_2, \dots, t_n$  аргументтерине симметриялуу функциялар болуп саналат. Симметриялык көп мүчөлөрдүн алгебралык касиеттеринен пайдаланып, (6.29) системасынын чечимин, даражасы  $n$  болгон кээ бир алгебралык теңдемелердин тамырларын табууга алып келүүгө боло тургандыгын Чебышев көрсөткөн. Биз ага токтолуп отурбастан, даяр алынган жыйынтыкка көңүл буралы.

Төмөнкү таблицادا  $n$  дин кээ бир маанилери үчүн ( $n = 2, 3, \dots, 7$ ), Чебышевдин квадратуралык формуласынын түйүндөрдөгү маанилери келтирилген [1]:

$n$	$i$	$t_i$	$n$	$i$	$t_i$
2	1	-0.577350	3	1	-0.707107
	2	0.577350		2	0
4	1	-0.794654		3	0.707107
	2	-0.187592	5	1	-0.832498
	3	0.187592		2	-0.374541
	4	0.794654		3	0
6	1	-0.866247		4	0.374541
	2	-0.422519	5	0.832498	
	3	-0.266635	7	1	-0.883862
	4	0.266635		2	-0.529657
	5	0.422519		3	-0.323912
	6	0.866247		4	0
		5		0.323912	
		6		0.529657	
			7	0.883862	

Ал эми, (6.29) теңдемелер системасынын, С. Н. Бернштейн көрсөткөндөй  $n = 8$  жана  $n \geq 10$  болгон учурларда, чыныгы тамырлар

ры жашабайт. Демек, Чебышевдин квадратуралык формуласынын принципалдуу кемчилдиги мына ушунда жатат.

Каалагандай,  $[a, b]$  кесиндиси үчүн,  $n$  түйүндөгү Чебышевдин квадратуралык формуласы төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (6.30)$$

мында

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i, \quad (6.31)$$

мындагы  $t_i$  -лер жогорку таблицадан алынган  $[-1, 1]$  кесиндиси үчүн түйүндөр. Чебышевдин квадратуралык формуласы негизинен корабль жасоодо колдонулат.

**Мисал.**  $n=5$  деп алып, Чебышевдин формуласы боюнча төмөнкү интегралды эсептегиле

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Чыгаруу. Интеграл алдындагы функцияны  $f(x) = 1/(1+x^2)$  аркылуу белгилесек, анда (6.30) формула боюнча

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{5} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)],$$

мындагы  $x_i$  -лер (6.31) формуласы боюнча төмөнкүдөй эсептелинген:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0.832498) = 0.083751,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0.374541) = 0.3127295,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.5,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.374541 = 0.6872705,$$

$$x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.832498 = 0.916249.$$

Ал эми интеграл алдындагы функциянын  $f(x_i) = 1/(1+x_i^2)$  тиешелүү маанилери төмөнкү маанилерди алат:

$$f(x_1) = \frac{1}{1+0.083751^2} = 0.993034467,$$

$$f(x_2) = \frac{1}{1+0.3127295^2} = 0.910912950,$$

$$f(x_3) = \frac{1}{1+0.5^2} = 0.8,$$

$$f(x_4) = \frac{1}{1+0.6872705^2} = 0.679190606,$$

$$f(x_5) = \frac{1}{1+0.916249^2} = 0.543622371.$$

Мындан

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{5} [0.993034467 + 0.910912950 + 0.8 + 0.679190606 + 0.543622371] = \frac{1}{5} \cdot 3.926760554 = 0.785352111.$$

Салыштыруу үчүн интегралдын так маанисин келтирели:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0.785398163.$$

Мында салыштырмалуу каталик, 0.006% түзөт.

**Мисал.** Чебышевдин формуласында  $n=5$  деп кабыл алып төмөнкү интегралды эсептегиле

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Чыгаруу. (6.31) формуласы боюнча эсептелинген  $x_i$  – маанилери жана бул маанилер боюнча эсептелинген интеграл алдындагы функциянын тиешелүү маанилери төмөнкү таблицкага жайгаштырылган:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
1	1.083751000	0.312178802
2	1.312729500	0.204980986
3	1.500000000	0.148753440
4	1.687270500	0.109658681
5	1.916249000	0.076794779
$\Sigma$		0.852366688

Анда Чебышевдин формуласы боюнча, таблицадагы маанилерди эсепке алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{1}{5} \cdot 0.852366688 = 0.170473338.$$

## 6.5. Өздүк эмес интегралдарды жакындатып эсептөө.

*Аныктама.* Анык интегралды

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.32)$$

өздүк интеграл деп атайбыз, эгерде  $[a, b]$  интегралдоо аралыгы чектүү болуп жана бул аралыкта интеграл алдындагы  $f(x)$  функциясы үзгүлтүксүз болсо.

Башка учурларда (6.32), өздүк эмес интеграл деп аталат. Башка учурларга интегралдоо пределдеринин бири же экөө тең чексиз болгон же интегралдоо аралыгынын жок дегенде бир чекитинде интеграл алдындагы функция чекчизге айланган интегралдар кирет.

Адегенде, интегралдоо пределинин бири чексиз болгон

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad 0 < a < \infty \quad (6.33)$$

өздүк эмес интегралын жакындатып эсептөөнү карайлы, мында  $a \leq x < \infty$  үчүн  $f(x)$  үзгүлтүксүз функция.

*Аныктама.* Эгерде

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (6.34)$$

чектүү предели жашаса, анда аны жогорку интегралдоо предели чексиз болгон өздүк эмес интеграл деп аташат да

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

аркылуу белгилешет.

Эгерде (6.34) предели чектүү болсо, анда (6.33) өздүк эмес интегралды жыйналуучу деп, ал эми предели жашабаса, анда таралуучу деп айтабыз. Интеграл жыйналуучу болгон кезде  $f(x)$  функциясы  $[a, b]$  чексиз жарым кесиндиде интегралдануучу функция деп аталат. Ошондуктан, өздүк эмес интегралды эсептөөдөн мурда, бул интегралдын жыйналуучу боло тургандыгын алдын-ала, белгилүү болгон жыйналуучулук белгилерин колдонуп тактоо керек.

Жыйналуучу болгон (6.33) өздүк эмес интегралдын төмөнкүдөй эсептөө ыкмалары бар.

1. Өздүк эмес интегралдагы, интегралдоо аралыгын  $[0, 1]$  кесиндисине өткөрө турган  $x = a/(1-t)$  алмаштырууну кийирүүгө же бөлүктөп интегралдоого болот. Мында интеграл алдындагы функция

жана анын биринчи туундусу чектелген боюнча калышы керек. Алынган өздүк интегралды квадратуралык формулаларды колдонуп, жакындатып эсептейбиз.

**Мисал.** Өздүк эмес интегралды эсептегиле:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Чыгаруу.  $x = 1/(1-t)$  алмаштырууну кийирип, чектүү предели менен интеграл алабыз

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(2-t)\sqrt{1-t}},$$

бирок  $t = 1$  болгон учурда өзгөчөлүккө ээ.

Бул интегралды бөлүктөп интегралдап төмөнкүгө ээ болобуз:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(2-t)} d(-2\sqrt{1-t}) = -\frac{2\sqrt{1-t}}{2-t} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{(2-t)^2} dt = 1 + 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{(2-t)^2} dt.$$

Акыркы алынган интеграл, өздүк интеграл болгондуктан, ага квадратуралык формулалардын бирин колдонолу, б.а. трапециянын формуласы боюнча эсептейли.  $n=10$  болгондо, интеграл алдындагы

$f(t_i) = \sqrt{1-t_i}/(2-t_i)^2$  функциянын  $x_i = a + i \cdot h$  чекигтериндеги маанилери төмөнкү таблицанын үчүнчү мамычасында эсептелинген,  $h=0.1$ .

$i$	$t_i$	$f(t_i)$
0	0.0	0,250000000
1	0.1	0,262793157
2	0.2	0,276057775
3	0.3	0,289501739
4	0.4	0,302576824
5	0.5	0,314269681
6	0.6	0,322681394
7	0.7	0,324096188
8	0.8	0,310564997
9	0.9	0,261345261
10	1.0	0,000000000

Анда (6.15) формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{(2-t)^2} dt \approx T_{10} = 0.1 \cdot 2.788887016 = 0.278888702.$$

Демек,

$$I = 1 + 2 \cdot I_1 \approx 1 + 2 \cdot 0.278888702 = 1.557777403.$$

2. Эсептөөнүн дагы бир ыкмасын келтирели. Берилген  $\varepsilon$  тактыгында өздүк эмес интегралды эсептөө үчүн, ал интегралды төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + R, \quad (6.35)$$

мында

$$R = \int_A^{\infty} f(x) dx$$

- дээрлик кичине калдык мүчө.

Интеграл жыйналуучу болгондуктан, чексиз интегралдоо пределинин ордуна жетишээрлик чоң болгон  $A$  санын, төмөнкү барабарсыздык орун ала тургандай тандап алууга болот:

$$\left| \int_A^{\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.36)$$

Квадратуралык формулалардын бири менен

$$\int_a^A f(x) dx$$

өздүк интегралды эсептесек болот. Айталы  $S$ ,  $\varepsilon/2$  тактыгына чейинки бул интегралдын жакындатылган мааниси болсун, б.а.

$$\left| \int_a^A f(x) dx - S \right| < \varepsilon. \quad (6.37)$$

Демек, (6.35) формуласынан (6.36), (6.37) барабарсыздыктарын эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx - S \right| < \varepsilon,$$

б.а. коюлган маселе чечилген болот.

3. Айрым учурларда интеграл алдындагы  $f(x)$  функциясы же анын туундусу  $[a, b]$  интегралдоо аралыгынын кээ бир ички  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) чекиттеринде, чектүү сандагы үзүлүү чекиттерине ээ болушу мүмкүн. Мындай учуларда функциянын же анын туундусу үзгүлтүксүз болгон бөлүкчө кесиндилер үчүн сандык ыкмаларды колдонуп эсептеп, жыйынтыгын кошобуз. Мисалы,  $f(x)$  функциясы  $x = c$  ( $a < c < b$ ) бир үзүлүү чекитине ээ болгон учурда төмөнкү барабардыкты алабыз:



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Оң жакта турган интегралдардын ар бирин эсептөө үчүн каралган сандык интегралдоо методдорун колдонсок болот.

4. Үзүлүү чекиттерине ээ болгон функциянын интегралын жакындатып эсептөө үчүн өзгөчөлүктөрдү бөлүп алуу ыкмасын колдонууга болот.

Эгерде функция чектүү интегралдоо аларыгында кээ бир  $x = c$  чекитинде чексизге айланса, анда өзгөчөлүк бөлүнгүдөй кылып ал функцияны эки функциянын суммасы катарында көрсөтүүгө болот, б.а.  $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ , мында  $\psi(x)$  чектелген функция, ал эми  $\varphi(x)$  берилген чекитте өзгөчөлүккө ээ, бирок, анын өздүк эмес интегралын аналитикалык жол менен эсептөөгө болот. Бул учурда  $\psi(x)$  чектелген функциясын интегралдоо үчүн гана сандык метод колдонулат.

**Мисал.** Өздүк эмес интегралды жакындатып эсептегиле

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Чыгаруу. Интеграл алдындагы  $f(x) = 1/\sqrt{x(1-x)}$  функциясы  $[0, 1/2]$  кесиндисинде жалгыз гана  $x = 0$  чекитинде өзгөчөлүккө ээ. Төмөнкү функцияны  $x$  тин даражасы боюнча  $x^4$  чейинки тактыкта Тейлордун катарына ажыраталы

$$\varphi(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Элементардык математикадан белгилүү болгон Ньютондун биномунун формуласын колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4.$$

Анда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} dx + I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx + \\ &+ \frac{5}{16} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx + \frac{35}{128} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}} dx + I_1 = 1.414213562 \cdot 1.109562562 + I_1 = \\ &= 1.569158423 + I_1, \end{aligned}$$

мында

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}} dx,$$

мындагы  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - (1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4)$ ,  $\psi(0) = 0$ .

Калган  $I_1$  өздүк интегралын  $[0, 1/2]$  кесиндисин барабар  $n = 10$  бөлүккө бөлүп, (6.17) Симпсондун формуласы боюнча эсептейли (мында Ньютондун биномунун кийинки мүчөсүн эсепке алуу керек),  $h = 0,05$ . Интеграл алдындагы функциянын,  $x_i = a + i \cdot h$  чекиттериндеги маанилери тогуз белгиге чейинки тактыгы менен төмөнкү таблицанын үчүнчү мамычасында эсептелинген.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	0.00	0,000000000
1	0.05	0,000000344
2	0.10	0,000007782
3	0.15	0,000048252
4	0.20	0,000176090
5	0.25	0,000480652
6	0.30	0,001091808
7	0.35	0,002184775
8	0.40	0,003984470
9	0.45	0,006769505
10	0.50	0,010875910

Симпсондун формуласы боюнча, төмөнкүнү алабыз:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}} dx \approx S_{10} = \frac{0.05}{3} \cdot [0.010875910 + 4 \cdot 0.009483527 + 2 \cdot 0.0052600150] = \frac{1}{60} \cdot 0.059330320 = 0.000988839.$$

Демек,

$$I = 1.569158423 + I_1 = 1.569158423 + 0.000988839 = 1.570147262.$$

Салыштыруу үчүн, берилген интегралдын так маанисин келтирели, аны жеңил эле эсептөөгө болот:

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2} = 1.570796327.$$

## 6.6. Эселүү интегралдар.

Сандык методдор эселүү интегралдарды эсептөө үчүн дагы колдонулат. Мында биз, төмөнкү көрүнүштөгү

$$\iint_G f(x, y) dx dy \quad (6.38)$$

кош интегралды (механикалык кубатура) кароо менен чектелебиз. Кош интегралды эсептөө ыкмаларын карайлы.

1. Айталы,  $f(x, y)$  функциясы  $G$  чектүү областында аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун.  $G$  областынан  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) чекиттеринин (түйүндөрүнүн) системасын тандайлы. (6.38) кош интегралын эсептөө үчүн, аны жакындатып төмөнкүгө барабарлап, кубатуралык формула алабыз:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i) \quad (6.39)$$

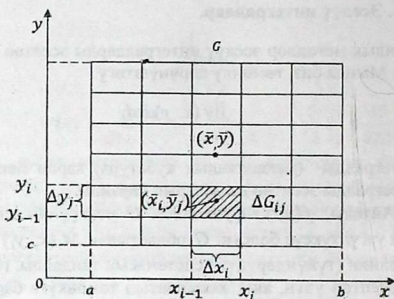
$A_i$  коэффициенттерин табуу үчүн (6.39) кубатуралык формуланын, даражасы берилген  $n$  санынан ашып кетпеген бардык

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l \leq n} c_{kl} x^k y^l$$

көп мүчөлөр үчүн так аткарылуусун талап кылабыз. Ал үчүн, (6.39) формуласы көбөйтүүчүлөрдүн даражасы үчүн

$$x^k y^l \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, n; k + l \leq n)$$

так болушу зарыл жана жетиштүү.



6.5- сүрөт.

(6.39) формуласындагы  $f(x, y) = x^k y^l$  функциянын ордуна койсок, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\iint_G x^k y^l dx dy = \sum_{i=1}^N A_i x_i^k y_i^l, \quad (6.40)$$

$$(k, l = 0, 1, 2, \dots, n; k + l \leq n)$$

Демек, (6.39) формуладагы  $A_i$  коэффициенттери, жалпылап айтканда, (6.40) сызыктуу теңдемелер системасынан аныкталышы мүмкүн. (6.40) системасы аныкталган болушу үчүн, андагы белгисиздердин саны теңдемелердин санына барабар болушу зарыл. Мындан, төмөнкүнү алабыз:

$$N = (n+1) + n + \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. (6.38) интегралын торчо методу менен эсептөө ыкмасын карайлы.

Айталы,  $G$  интегралдоо областы тик бурчтук болсун дейли:  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ . Орто жөнүндөгү теорема боюнча  $f(x, y)$  функциясынын орто маанисин табалы:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{S} \iint_G f(x, y) dx dy, \quad (6.41)$$

мында  $S = (b-a)(d-c)$ . Функциянын орто мааниси, функциянын тик бурчтуктун борборундагы маанисине жакындатылган түрдө барабар деп эсептейли, б.а.  $\bar{f}(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y})$ . Анда (6.41) кош интегралды жакындатып эсептөө үчүн туюнтма алабыз:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx S f(\bar{x}, \bar{y}), \quad (6.42)$$

мында

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}, \quad \bar{y} = \frac{c+d}{2}.$$

Бул формуланын тактыгын көтөрүү үчүн  $G$  областын тик бурчтуу  $\Delta G_{ij}$  (6.5-сүрөт) бөлүкчө торчолорго бөлөбүз:  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $y_{j-1} \leq y \leq y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Ар бир бөлүкчө торчого (6.42) формуласын колдонолу:

$$\iint_{\Delta G_{ij}} f(x, y) dx dy \approx f(\bar{x}, \bar{y}) h_i k_j.$$

Бул туюнтмаларды бардык бөлүкчө торчолор боюнча суммалап, кош интегралдын маанисин алабыз:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(\bar{x}, \bar{y}) h_i k_j. \quad (6.43)$$

Бөлүкчө торчолордун периметрлерин өтө кичирейтсек, (6.43) формуласындагы интегралдык сумма, каалагандай үзгүлтүксүз  $f(x, y)$  функциясы үчүн интегралдын маанисине умтулат.

Торчо методунун каталыгы төмөнкү катнашта бааланышын көрсөтүүгө болот:

$$R = O(h^2 + k^2).$$

Демек, (6.43) формуласы экинчи тартиптеги тактыкка ээ.

3. Эгерде  $G$  интегралдоо областы тик бурчтук болбосо, анда тиешелүү өзгөрүлмөнү алмаштыруу жолу менен аны тик бурчтук көрүнүшүнө алып келүүгө болот. Мисалы, эгерде  $G$  интегралдоо областы ийри сызыктуу төрт бурчтук  $a \leq x \leq b$ ,  $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$  көрүнүштө берилсе, анда бул областты

$$t = \frac{y - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

алмаштыруунун жардамында тик бурчтук көрүнүшкө алып келебиз.

Адатта интегралдоо областы ийри сызыктуу төрт бурчтук болгон учурда кош интегралды эсептөө үчүн, ал төмөнкүдөй белгилүү эреже боюнча кайталап интегралдоого келтирилет:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_a^b F(x) dx,$$

мында

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Бул барабардыктын оң жагындагы анык интегралга квадратуралык формулалардын бирин колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i), \quad (6.44)$$

мында  $x_i \in [a, b]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), ал эми  $A_i$  – кээ бир турактуу коэффициенттер. Өз кезегинде

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

мааниси дагы айрым квадратура формуласы боюнча табылат:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j),$$

мында  $B_{ij}$  – тиешелүү турактуулар.

Демек, (6.44) формуласынан төмөнкүнү алабыз:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j),$$

мында  $A_i$  жана  $B_{ij}$  – белгилүү турактуулар.

### 6.7. Симпсон тибиндеги кубатуралык формула.

Айталы, кош интегралды эсептөө үчүн  $R$  интегралдоо областы, жактары координата огуна параллел болгон  $\{a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$  тик бурчтук болсун.

Ар бир  $[a, A]$  жана  $[b, B]$  аралыктарын тиешелеш  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h = A$  жана  $y_0 = b$ ,  $y_1 = b + k$ ,  $y_2 = b + 2k = B$  чекиттери аркылуу тең экиге бөлөлү, мында

$$h = \frac{A - a}{2}, \quad k = \frac{B - b}{2}.$$

Анда бардык чекиттердин саны тогуз болот:  $(x_i, y_i)$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ). Кош интегралды эсептөө үчүн, аны кайталап интегралдоого келтирип:

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy$$

мындагы ички интегралды Симпсон квадратуралык формуласы боюнча эсептейли:

$$\begin{aligned} \iint_{(R)} f(x, y) dx dy &= \int_a^A dx \cdot \frac{k}{3} [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] = \\ &= \frac{k}{3} \left[ \int_a^A f(x, y_0) dx + 4 \int_a^A f(x, y_1) dx + \int_a^A f(x, y_2) dx \right]. \end{aligned}$$

Ар бир интегралга кайтадан Симпсон формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} \iint_{(R)} f(x, y) dx dy &= \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0)] + \\ &+ 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] + \\ &+ [f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \} \end{aligned}$$

же

$$\begin{aligned} \iint_{(R)} f(x, y) dx dy &= \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)] + \\ &+ 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16f(x_1, y_1) \}. \quad (6.45) \end{aligned}$$

Бул формуланы Симпсондун кубатуралык формуласы деп атайбыз, мында  $f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)$  – мааниси,  $R$  тик бурчтугунун чокуларындагы интеграл алдындагы функциянын маанилеринин суммасы,  $f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)$  – тик бурчтуктун жактарынын ортосундагы интеграл алдындагы функциянын маанилеринин суммасы,  $f(x_1, y_1)$  – тик бурчтуктун борборундагы  $f(x, y)$  функциясынын мааниси.

**Мисал.** Симпсон кубатуралык формуласын колдонуп

$$I = \int_2^{2.4} \int_3^{3.6} \frac{dx dy}{(1+x)(1+y)}$$

кош интегралды эсептегиле.

Чыгаруу: Интеграл алдындагы

$$f(x_i, y_i) = \frac{1}{(1+x_i)(1+y_i)}$$

функциянын тиешелүү маанилери төмөнкү таблицага жайгаштырылган, мында  $h = (2.4 - 2)/2 = 0.2$ ,  $k = (3.6 - 3)/2 = 0.3$ .



	2.0	2.2	2.4
3.0	0.083333333	0.078125000	0.073529412
3.3	0.077519380	0.072674419	0.068399453
3.6	0.072463768	0.067934783	0.063938619

Симпсондун кубатуралык формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$I = \frac{0.2 \cdot 0.3}{9} \cdot [(0.083333333 + 0.073529412 + 0.072463768 + 0.063938619 + 4 \cdot (0.078125000 + 0.077519380 + 0.068399453 + 0.067934783)) + 16 \cdot 0.072674419] = 0.006666667 \cdot 2.623970291 = 0.017493135.$$

Берилген кош интегралдын так маанисин эсептейли:

$$J = \int_2^{2.4} \int_3^{3.6} \frac{dx dy}{(1+x)(1+y)} = \ln 1.133333333 \cdot \ln 1.15 = 0.017493044$$

Демек, интегралды эсептегендеги кетирилген каталык

$$\Delta I = |J - I| = 0.00000009 \approx 10^{-7}.$$

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Интегралдоо аралыгын барабар 10 бөлүккө бөлүп, төмөнкү интегралды:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

тик бурчтуктар, трапеция жана Симпсондун методдору боюнча эсептегиле.

2. Интегралдоо кадамын тиешелүү 4, 8, 16 барабар бөлүккө бөлүп, трапеция методун пайдаланып төмөнкү интегралды эсептегиле:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \sin \frac{\pi x}{2} dx.$$

3.  $\varepsilon = 0.001$  тактыкта тик бурчтуктар жана трапеция методун колдонуп, төмөнкү интегралдарды эсептегиле:

$$\int_{0.3}^{1.9} \sqrt{7+2x^3} dx, \quad \int_{1.2}^{1.6} \frac{1}{\sqrt{1+2x^3}} dx.$$

4. Симпсондун методунун жардамында интегралды эсептегиле,  $\varepsilon = 0.0001$ :

$$\int_{0.3}^{1.5} \frac{\sin 2x}{x^2 + 1} dx.$$

5. Интегралды тик бурчтуктар, трапеция жана Симпсондун методдору боюнча эсептегиле. Ар бир методдогу аткарылган итерациянын санын кошо эсептегиле,  $\varepsilon = 0.001$ :

$$\int_{0.4}^{0.6} \sqrt{x} \cos x^2 dx.$$

## 7-ГЛАВА. КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

### 7.1. Маселенин коюлушу.

Табият таануунун жана жаратылыштын закондорун окуп үйрөнүүдө эң оболу алардын математикалык моделин түзөбүз. Мисалы, физиканын, техниканын, биологиянын, экономиканын ж.б. тармактардын маселелерин чыгарууда, адегенде ал тармактардын закондорунун негизинде, берилген маселенин математикалык моделин түзүп алабыз. Айрым учурларда, ал математикалык модель белгисиз функцияны, анын аргументтерин жана туундуларын кармаган теңдеме болот. Мындай теңдеме дифференциалдык деп аталат. Ушуга байланыштуу дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу, бирден бир зор маанидеги математикалык маселе болуп саналат. Эсептөө математикасында дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун сандык методдору изилденгендиктен, аларды айрыкча компьютерди пайдалануу менен айкалыштыруу натыйжалуу.

Дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу методдорун талкуулоодон мурда, дифференциалдык теңдемелер курсунан белгилүү болгон кээ бир маалыматтарды эске салалы.

*Дифференциалдык теңдеме* деп, бир же бирден көп өзгөрүлмө чондуктарды, ал өзгөрүлмө чондуктардан көз каранды болгон белгисиз функцияны жана анын туундуларын кармаган теңдемени айтабыз.

*Кадимки дифференциалдык теңдеме* деп, белгисиз функция бир өзгөрүлмө чондуктан көз каранды болгон дифференциалдык теңдемени айтабыз. Эгерде белгисиз функция бирден көп өзгөрүлмө чондуктардан көз каранды болсо, андай дифференциалдык теңдеме *жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме* деп аталат.

Биз кадимки дифференциалдык теңдемелерди гана карайбыз. Көп учурда кадимки деген сөз айтылбай калат да, жөн эле дифференциалдык теңдеме деп айтылат.

Дифференциалдык теңдемедеги белгисиз функциянын туундусунун эң жогорку тартиби, ал дифференциалдык теңдеменин *тартиби* деп аталат. Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын табуу дифференциалдык теңдемени *интегралдоо* деп аталат, ал эми дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын графиги, дифференциалдык теңдеменин *интегралдык сызыгы* деп аталат.

Биз, эң жөнөкөй биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемени карайлы:

$$y' = f(x, y). \quad (7.1)$$

Бул теңдемеге байланыштуу негизги маселе, Кошинин маселеси деген ат менен бизге белгилүү: (7.1) теңдеменин  $y = y(x)$  функциясы көрүнүштө,

$$y(x_0) = y_0 \quad (7.2)$$

баштапкы шартын канааттандырган чыгарылышын табуу. Кошинин маселесинде (7.2) шарты баштапкы шарт, ал эми  $x_0$  чекити баштапкы чекит деп аталат.

Айталы,  $f(x, y)$  функциясы  $xOy$  тегиздигинин  $G$  областында аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун.  $G$  областында төмөнкү тик бурчтукту карайлы:

$$R = \{x - x_0 \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

мында  $a, b$  берилген оң сандар, ал эми  $(x_0, y_0)$  тик бурчтуктун борбору. Коши маселесинин чыгарылышы  $f(x, y)$  функциясы кандай касиетке ээ болгондо жашаарын жана жалгыз болоорун көрсөтүүгө болот. Эгерде  $|y_1 - y_0| \leq b |y_2 - y_0| \leq b |x - x_0| < a$  шартын канааттандырган чекиттери үчүн

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N |y_2 - y_1|$$

шарты орун алса, мында  $N$  – жалпы учурда областан көз каранды болгон, бирок  $x, y$  тен көз каранды болбогон турактуу чоңдук, анда  $f(x, y)$  функциясы  $y$  аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырат дейбиз.

Эгерде  $f(x, y)$  функциясы  $R$  тик бурчтукунда  $x, y$  аргументтери боюнча үзгүлтүксүз болсо, анда ал Вейерштрассын теоремасы боюнча ал тик бурчтукта чектелген болот, б.а.

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (7.3)$$

мында  $M$  – турактуу чоңдук,  $x, y \in R$ .

*Теорема (Пикардын теоремасы).* Эгерде  $f(x, y)$  функциясы аргументтери боюнча  $R$  туюк тик бурчтукунда үзгүлтүксүз болсо жана ал  $y$  аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырса, анда (7.1), (7.2) Коши маселесинин  $y = y(x)$  чыгарылышы  $|x - x_0| \leq h$  сегментинде жашайт жана жалгыз болот, мында  $h = \min(a, b/M)$ .

Эгерде  $f(x, y)$  функциясы  $G$  областында чектелген  $f'_y(x, y)$  туундуга ээ болсо, анда  $(x, y) \in G$  үчүн:

$$N = \max |f'_y(x, y)|.$$

Классикалык анализде, элементардык же атайын функциялар аркылуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын табуунун бир далай ыкмалары иштелип чыккан. Ошондой болсо да, кээ бир практикалык маселелерди чыгарууда дифференциалдык теңдемелердин так чыгарылыштарын табуу мүмкүн эмес, мындай учурда ал ыкмалар жарамсыз болуп калат. Ушул себептен, практикалык маселелерди чыгаруу үчүн дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун жакындатылган методдору түзүлгөн.

Жалпылап айтканда, чечимди көрсөтүү формасына жараша кадимки дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу методдорун, негизги үч группага бөлүүгө болот:

1. Кээ бир *аналитикалык методдор* менен, дифференциалдык теңдемелер курсунан таанышпыз. Биринчи тартиптеги бир катар теңдемелер үчүн, ошондой эле жогорку тартиптеги кээ бир типтеги теңдемелер үчүн, аналитикалык өзгөртүү жолу менен чечимди формула көрүнүштө алууга болот.
2. *Графикалык методдор*, чечимди геометриялык түзүүлөрдүн жардамында берет.
3. Биз, азыркы учурда илимий-техникалык маселелерди изилдөөдө негизги инструмент болуп саналган, дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун *сандык методдору*н карайбыз. Бул методдорду айрыкча заманбап компьютерлерди пайдалануу менен айкалыштыруу натыйжалуу экендигин бөтөнчө белгилеп кетүү зарыл. Сандык методдор изделүүчү функцияны таблица көрүнүштө берет.

Төмөндө, көрсөтүлгөн группаларга тиешелүү, кээ бир тандалган (7.1) көрүнүштөгү биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу методдору каралган. Ал методдорго төмөнкүлөр кирет:

- Пикардын методу;
- Эйлердин методу;
- Эйлердин жакшыртылган методу;
- Рунге-Куттанын методу;
- Адамстын методу ж.б.

Ал эми  $n$  – тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге байланыштуу Коши маселесин, биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер системасына алып келүүгө болот. Мисалы, үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдемени

$$y''' = f(x, y, y', y''),$$

$z = y'$ ,  $u = y''$  алмаштырууларын кийрип, биринчи тартиптеги үч теңдемелер системасы көрүнүштө жазууга болот:

$$y' = z,$$

$$z' = u,$$

$$u' = f(x, y, z, u).$$

Кадимки дифференциалдык теңдемелер системасын чыгаруу методдору, тиешелүү бир теңдемени чыгаруу методуна негизделет.

## 7.2. Пикардын методу.

Бул метод, (7.1) дифференциалдык теңдеменин жакындатылган чечимин аналитикалык берилиштеги функция көрүнүштө алууга мүмкүндүк берет. Пикардын методу, (7.1) теңдеменин чыгарылышынын жашашы жана анын жалгыздыгы жөнүндөгү теореманы далилдөөгө байланыштуу келип чыккан жана чынында, бирден бир кысып чагылтуу принцибин колдонулушу болуп саналат. Аны 1890-жылдары Пикар колдонгондуктан, Пикардын методу деп аташат.

Айталы, жашоо теоремасынын шартында, (7.1), (7.2) Кошинин маселесинин чыгарылышын табуу талап кылынсын. Кошинин маселеси төмөнкү интегралдык теңдемеге эквивалентүү:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (7.4)$$

Чындыгында, эгерде  $y = \varphi(x)$  функциясы Коши маселесинин чыгарылышы болсо, анда

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)), \quad \varphi(x_0) = y_0$$

болот. Акыркы теңдештиктин эки жагын  $x_0$  дөн  $x$  ке чейин интегралдап жана баштапкы шартты колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx$$

б.а.  $\varphi(x)$  функциясы (7.4) интегралдык теңдеменин чыгарылышы болот. Тескерисинче,  $\varphi(x)$  функциясы (7.4) интегралдык теңдемени канааттандырса

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx,$$

анда бул теңдештиктин эки жагына  $x = x_0$  маанисин койсок:

$$\varphi(x_0) = y_0$$

болот, б.а.  $\varphi(x)$  функциясы (7.2) баштапкы шартты канааттандырат. Ал эми теңдештиктин эки жагынан  $x$  боюнча туунду алсак, анда  $f(x, \varphi(x))$  функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

б.а.  $y = \varphi(x)$  функциясы (7.1) теңдемени жана (7.2) шартты канааттандырат. Демек, (7.4) интегралдык теңдеме, толук маселенин коюлушун камтыйт, жана ал үчүн кошумча шарттарды (мисалы, баштапкы шартты) берүү керек эмес.

Аны менен катар, (7.4) интегралдык теңдеме удаалаш жакындатуу методун колдонууга мүмкүндүк берет. Нөлдүк жакындатуу функциясы катары  $y_0$  алсак, анда калган жакындатуулар жалпы учурда төмөнкү итерациялык формула менен аныкталат:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

Демек, бул формула аркылуу  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функционалдык удаалаштык түзүлөт. (7.5) формуласынан  $f(x, y(x))$  функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде, удаалаштыктын ар бир мүчөсү үзгүлтүксүз функция экендиги жана баштапкы шартты канааттандыруулары келип чыгат.

(7.5) теңдемесине жашоо теоремасынын шартында кысып чагылтуу принцибин колдонуп [5],  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  удаалаштыгынын жыйналуучулугун көрсөтүүгө болот. Анын предели (7.5) интегралдык теңдеменин чыгарылышы болот, анда демек, (7.2) баштапкы шарты менен (7.1) дифференциалдык теңдеменин дагы. Бул деген,  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  удаалаштыктын  $k$ -чы мүчөсү, (7.1) теңдеменин так чечимине жакындашууну билдирет.

$k$ -чы жакындатуунун каталыгын төмөнкү формула менен баалайбыз:

$$|y(x) - y_k(x)| \leq N^k M \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (7.6)$$

мында  $N$  – Липшицтин константасы,  $M$  – жогорудагы (7.3) барабарсыздыгындагы  $f(x, y)$  функциясынын модулуунун жогорку чеги, ал эми  $|x - x_0| \leq h$  жака белин аныктоо үчүн  $h$  чондугу

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

формуласы боюнча эсептелинет. -

**Мисал.** Удаалаш жакындатуу методун колдонуп,  $y(0) = 1$  баштапкы шартын канааттандырган

$$y' = x + y$$

дифференциалдык теңдеменин жакындатылган чечимин тапкыла.

Чыгаруу. Берилген маселе төмөнкү интегралдык теңдемеге тең күчтө

$$y(x) = 1 + \int_0^x (x + y) dx.$$

Нөлүнчү жакындатуу үчүн  $y_0(x) = 1$  функциясын алып, калган жакындатууларды төмөнкү формула боюнча аныктайлы:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x (x + y_{n-1}(x)) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Мындан,

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x + 1) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + \frac{x^2}{2}) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24},$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}) dx =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120},$$

ж.у.с. алабыз.

Берилген теңдемени жогорку математика курсунан белгилүү болгон методдор аркылуу чыгарууга болот. Эсептөөлөрдү калтырып, баштапкы шартты эсепке алып, так чечим үчүн акыркы туюнтманы жазалы:

$$y(x) = 2e^x - x - 1 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + \dots$$

Бул катар менен, Пикардын методу менен алынган жакындатууларды салыштырып көрсөк, ар бир жакындатуунун акыркы мүчөсүнөн башка бардык мүчөлөрү, так чечимди көрсөтүп турган ка-



тардын мүчөлөрү менен дал келгендигин байкоого болот. Мындай дал келүүчүлүк, албетте, жалпы учурда сөзсүз аткарылышы милдеттүү эмес.

Үчүнчү жакындатуунун каталыгын баалайлы. Ал үчүн

$$R = \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

тик бурчтугунда  $a = 1, b = 2$  деп алалы. Тик бурчтукта  $f(x, y) = x + y$  функциясы аныкталган жана үзгүлтүксүз, анын үстүнө:

$$M = |x + y| \leq 3, \quad h = \min\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad N = 1.$$

Баалочу (7.6) формуланы пайдаланып, төмөнкүнү алабыз:

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{3 \cdot 2^4}{3^4 \cdot 4!} \approx 0.025.$$

### 7.3. Эйлердин методу.

Кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн, Кошинин маселесин чыгаруунун эң жөнөкөй сандык методу болуп, Эйлердин методу саналат. Бул жана мындан кийинки каралуучу методдор, izdelүүчү функцияны таблица көрүнүштө берет.

Айталы,  $[a, b]$  кесиндисинде (7.1), (7.2) Кошинин маселесинин жакындатылган чечимин табуу талап кылынсын.

Ал үчүн,  $h = (b - a)/n$  кадамын тандап  $[a, b]$  кесиндисин  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  чекиттери аркылуу  $n$  барабар бөлүккө бөлөлү, мында  $x_i = a + ih$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), б.а.  $x_i - x_{i-1} = h$ .

Биздин максат, Коши маселесинин  $y = y(x_i)$  так чыгарылышына жакын болгон

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

жакындатылган сандарын табуу, б.а.

$$y_i \approx y(x_i)$$

болгондой  $y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ ) жакындатылган сандарын издейбиз.

Туундунун аныктамасынан, б.а. (5.1) формуласынан

$$y'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h},$$

нөлгө жакын болгон  $h$  сандары үчүн

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} \quad (7.7)$$

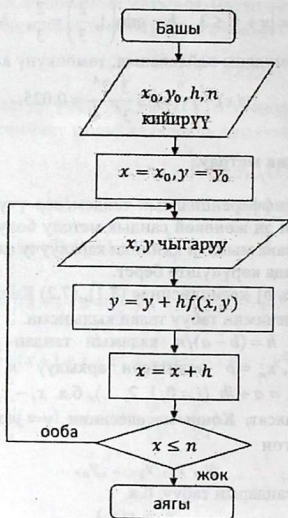
формуласын алабыз. Бирок (7.1) теңдемеге ылайык

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)).$$

Бул тендеменин сол жагын, (7.7) формуланын оң жагына алмаштырсак, анда төмөнкүнү алабыз:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

Мында (7.1) тендемеден  $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) = f(x_i, y_i)$  келип чыгышын белгилеп кетели.



7.1-сүрөт. Эйлердин методунун алгоритми.

(7.8) формулада  $x = x_0$  болгондо,  $x_0, y_0, h$  белгилүү, андыктан  $y_1$  аныкталат:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Калган маанилерди окшош эле аныктайбыз:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

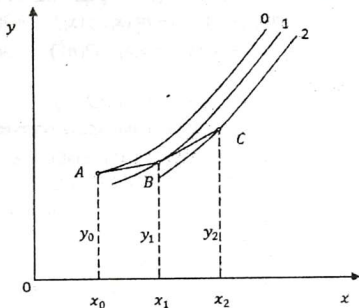
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

Демек,  $y(x_i)$  так чыгарылышына жакын болгон  $y_i$  жакындатылган сандарын табуу үчүн, төмөнкү алгоритм сунуш кылынат:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

Түзүлгөн алгоритм Эйлердин методу деп аталат.

Эйлердин методунда Кошинин маселесин чыгаруу алгоритми 7.1-сүрөттө көрсөтүлгөн. Анда  $x = x_0 = a$ ,  $y = y_0$  баштапкы маанилери, ошондой эле,  $h = (b - a)/n$  кадамынын чоңдугу жана  $n$  саны берилет. Жакындатылган чечим  $x + h, x + 2h, \dots, x + nh$  түйүндөрүндө алынат. Жыйынтыкты чыгаруу ар бир кадамда алдын ала каралган. Эгерде табылган маанилерди компьютердин эсине сактоо зарыл болсо, анда  $y_0, y_1, \dots, y_n$  маанилеринин массивин кийирүү керек.



7.2-сүрөт. Эйлердин методунун түшүндүрмөсү.

Эйлердин методунун геометриялык түшүндүрмөсү 7.2-сүрөттө берилген. Анда биринчи эки кадам сүрөттөлгөн, б.а.  $x_1, x_2$  чекиттеринде жакындатылган маанилердин эсептелиниши түшүндүрүлгөн. 0, 1, 2 интегралдык ийрилери, (7.1) тендеменин так чечимин баяндайт. Бул учурда 0 ийриси (7.1), (7.2) Кошинин маселесинин так чечимине тиешелүү, себеби дегенде ал ийри баштапкы  $A(x_0, y_0)$  чекити аркы-

луу өтөт. Ал эми  $B, C$  чекиттери Кошинин маселесин Эйлердин методу менен чыгаруунун жыйынтыгында алынган. Алардын 0 ийриси-нен четтеп кетиши, методдун каталыгын мүнөздөйт. Чынында, ар бир кадамдын аткарылышында башка интегралдык ийриге өтөбүз.

Эйлердин методунун каталыгы жөнүндөгү суроону кененирээк карайлы.  $x_i$  чекитиндеги  $\delta_i$  каталык, изделүүчү  $y(x_i)$  так маани менен, жакындатылган  $y_i$  маанинин ортосундагы айырмага барабар, б.а.  $\delta_i = y(x_i) - y_i$ . Каталык,  $y_{i+1}$  эсептелгенде эмнеге барабар болоорун аныктайлы. Ал үчүн,  $y_i = y(x_i) - \delta_i$  жана  $y_{i+1} = y(x_{i+1}) - \delta_{i+1}$  маанилерин (7.9) коёлу. Анда

$$y(x_{i+1}) - \delta_{i+1} = y(x_i) - \delta_i + hf(x_i, y(x_i) - \delta_i). \quad (7.10)$$

Мындагы  $f$  функциясын  $(x_i, y(x_i))$  чекитинин жака белинде катарга ажыраталы:

$$f(x_i, y(x_i) - \delta_i) = f(x_i, y(x_i)) - \frac{\partial f}{\partial y} \delta_i + O(\delta_i^2) = f(x_i, y(x_i)) + O(\delta_i).$$

Алынган ажыралманы пайдаланып, (7.10) формуладан  $\delta_{i+1}$  туюнталы:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i)) + hO(\delta_i).$$

Мындан  $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + O(h^2)$  эсепке алып, төмөнкүнү алабыз:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + O(h^2) + hO(\delta_i). \quad (7.11)$$

Демек,  $\delta_{i+1}$  каталыгы  $\delta_i$  каталыгынан эки кошулуучуга айырмаланат: (7.7) формуласынын натыйжасында  $O(h^2)$  алабыз, ал эми  $y_i$  маанилеринин каталыгынын натыйжасында  $hO(\delta_i)$  алынат.

Эреже катары,  $y_1$  маанисин тапканда баштапкы  $y_0$  мааниси так берилет:  $\delta_0 = 0$ . Мындан

$$\delta_1 = O(h^2), \quad \delta_2 = \delta_1 + O(h^2) + hO(h^2) = \delta_1 + O(h^2) = O(h^2), \dots$$

Көрүнүп тургандай, (7.11) де акыркы кошулуучуну жокко чыгарсак болот:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + O(h^2),$$

б.а. каталык ар бир кадамда  $O(h^2)$  чондукка өсүп турат.

$x_0$  чекитинен чектүү  $L$  аралыкта турган,  $x_n$  чекитинде чечимди табуу учурунда, каталык  $O(h^2)$  чондуктарынын  $n$  кошулуучуларынан турат. Эгерде  $h = L/n$  эсепке алсак, анда  $\delta_n$  каталыгы үчүн акыркы туюнтманы алабыз:

$$\delta_{i+1} = nO(h^2) = \frac{L}{h}O(h^2) = O(h).$$

Демек биз, Эйлердин методу биринчи тартиптеги тактыкка ээ экендигин көрсөттүк.

**Мисал.** Төмөнкү Кошинин маселесин

$$y' = x + y,$$

$$y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Эйлердин методу менен  $n = 10$  үчүн жакындатып чыгаргыла жана аны

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

так чыгарылышы менен салыштыргыла,  $h = 0.1$ .

Чыгаруу. Бул учурда  $f(x, y) = x + y$ , анда (7.9) Эйлердин алгоритми боюнча

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (x_i + y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 9$$

болот, мында  $i = 0$  болгондо  $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$  белгилүү болгондуктан, бул формуладан төмөнкү маанилерди эсептейбиз:

$$x_1 = 0.1, \quad y_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1,$$

$$x_2 = 0.2, \quad y_2 = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.22,$$

$$x_3 = 0.3, \quad y_3 = 1.22 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.22) = 1.362,$$

ж.у.с. улантып отуруп  $y_4, y_5, \dots, y_{10}$  жакындатылган маанилерин аныктайбыз. Колдо эсептегенде бир топ убакытты кетиребиз, андыктан MS Excel де бул маанилерди жеңил эле алууга болот. Төмөнкү таблицасын үчүнчү мамычасында жакындатылган маанилер, төртүнчү мамычасында так чыгарылыштын маанилери жайгаштырылган, бешинчи мамычада каталык, алтынчы мамычада салыштырмалуу каталык процент менен эсептелген.

$i$	$x_i$	жакындатылган $y_i$	так чыгарылыш $y(x_i)$	каталык $y(x_i) - y_i$	салыш. каталык
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000	0%
1	0.1	1.1000	1.1103	0.1030	1%
2	0.2	1.2200	1.2428	0.0228	2%
3	0.3	1.3620	1.3997	0.0377	3%
4	0.4	1.5282	1.5836	0.0554	4%
5	0.5	1.7210	1.7974	0.0764	5%
6	0.6	1.9431	2.0442	0.1011	5%
7	0.7	2.1974	2.3275	0.1301	6%
8	0.8	2.4872	2.6511	0.1639	7%
9	0.9	2.8159	3.0192	0.2033	7%
10	1.0	3.1875	3.4366	0.2491	8%

Чечимди анализдесек,  $x_i$  нин өсүшү менен каталыктын өсүшүн байкоого болот. Таблицадан көрүнүп тургандай  $x_{10} = 1$  болгондо, Эйлердин методунун каталыгы 8% түзөт экен. Демек,  $x$  чоң болгондо Эйлердин методу олуттуу каталыктарга алып келиши мүмкүн, мындай учурларда жогорку тартиптеги сандык методдорду пайдалануу артыгыраак. Андай методдордун бири болуп, Эйлердин жакшыртылган методу саналат.

#### 7.4. Эйлердин жакшыртылган методу.

Эйлердин методундагыдай,  $[a, b]$  кесиндисинде (7.1), (7.2) Кошинин маселесинин жакындатылган чечимин табуу талап кылынсын. Кошинин маселесин Эйлердин жакшыртылган методу менен жакындатып эсептөө төмөнкү тартипте жүргүзүлөт. Баштапкы жакындатуу катары  $y_i$  ни эсептеп, биринчи  $\bar{y}_{i+1}$  жакындатууну (7.9) Эйлердин методу боюнча эсептейбиз:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.12)$$

Эсептелген  $\bar{y}_{i+1}$  маанини төмөнкү катыштын оң жагына коюп, акыркы маанини табабыз:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2}. \quad (7.13)$$

(7.12), (7.13) алгоритми Эйлердин жакшыртылган методу деп аталат жана аны төмөнкүдөй бир эле катыш көрүнүштө жазууга болот:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Эйлердин методунан айырмаланып, Эйлердин жакшыртылган методу экинчи тартиптеги тактыкка ээ, б.а.  $O(h^2)$  чоңдукта.

**Мисал.** Төмөнкү Кошиния маселесин

$$y' = x + y,$$

$$y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Эйлердин жакшыртылган методу менен  $n = 10$  үчүн жакындатып чыгаргыла жана аны

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

так чыгарылышы менен салыштыргыла,  $h = 0.1$ .

Чыгаруу. Бул учурга, (7.12), (7.13) алгоритмин жазалы:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \quad i = 0, 1, \dots, 9,$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [x_i + y_i + (x_{i+1} + y_{i+1})].$$

Анда  $i = 0$  болгондо  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 0.1$  белгилүү, андыктан  $\bar{y}_1$  жана  $y_1$  аныкталат:

$$\bar{y}_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1,$$

$$y_1 = 1 + 0.05 \cdot [0 + 1 + (0.1 + 1.1)] = 1.11.$$

$i = 1$  болгондо,  $x_1 = 0.1$ ,  $y_1 = 1.11$  белгилүү,  $\bar{y}_2$  жана  $y_2$  аныкталат:

$$\bar{y}_2 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1, \quad y_2 = 1 + 0.05 \cdot [0 + 1 + (0.1 + 1.1)] = 1.11.$$

Ушул сыяктуу улантып отуруп,  $\bar{y}_3, y_3, \bar{y}_4, y_4, \dots, \bar{y}_{10}, y_{10}$  табылат.

$x_i$	$\bar{y}_i$	жакынд. чечим $y_i$	так чечим $y(x_i)$	каталык $y(x_i) - y_i$	салыш. каталык
0.1	1.1000	1.1100	1.1103	0.0003	0.0308
0.2	1.2310	1.2421	1.2428	0.0008	0.0608
0.3	1.3863	1.3985	1.3997	0.0013	0.0896
0.4	1.5683	1.5818	1.5836	0.0018	0.1167
0.5	1.7800	1.7949	1.7974	0.0025	0.1420
0.6	2.0244	2.0409	2.0442	0.0034	0.1656
0.7	2.3049	2.3231	2.3275	0.0044	0.1876
0.8	2.6255	2.6456	2.6511	0.0055	0.2080
0.9	2.9901	3.0124	3.0192	0.0068	0.2272
1.0	3.4036	3.4282	3.4366	0.0084	0.2451

Жогорку таблицанын экинчи мамычасында  $\bar{y}_i$  жакындатылган маанилери, үчүнчү мамычасында жакындатылган  $y_i$  маанилери эсеп-

телинген, төртүнчү мамычада так чыгарылыштын маанилери жайгаштырылган, ал эми бешинчи мамычада каталык, алтынчы мамычада салыштырмалуу каталык эсептелинген.

Демек,  $x_{10} = 1$  болгондо Эйлердин жакшыртылган методу үчүн салыштырмалуу каталык  $0.2451 \approx 1\%$  түзөт, ал эми ушул эле мисалды Эйлердин методу боюнча караганыбызда, салыштырмалуу каталык  $8\%$  түзгөн.

### 7.5. Рунге-Куттанын методдору.

Жогоруда каралган (7.9) Эйлердин методу жана (7.12), (7.13) Эйлердин жакшыртылган методу, Рунге-Куттанын методдорунун классына тиешелүү болгон, биринчи жана экинчи тартиптеги методдордун жекече учуру болуп саналат. Бул методдор  $y_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) маанисин эсептөө үчүн,  $y_i$  маанисин, ошондой эле атайын тандалып алынган  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  жана  $y$  маанилеринде  $f(x, y)$  функциясынын маанисин пайдаланат. Андыктан, бул методдор бир кадамдуу методдордун тобуна кирет.

Эсептөө практикасында кеңири тараганы, төртүнчү тартиптеги Рунге-Куттанын методу эсептелет. Бул методдун алгоритми төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$k_0 = f(x_i, y_i), \quad k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_0}{2}\right), \quad (7.14)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right), \quad k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2).$$

Демек, Рунге-Куттанын бул методу ар бир кадамда (7.1) теңдеменин оң жагын төрт жолу эсептөөнү талап кылат. Бул методдун жалпы каталыгы төртүнчү тартиптеги тактыкка ээ, б.а.  $O(h^4)$ .

Эйлердин жана Эйлердин жакшыртылган методдору менен салыштырганыбызда, Рунге-Куттанын методу чоң көлөмдөгү эсептөөлөрдү талап кылат, бирок бул метод жогорку тактыкта болгондуктан, чоң кадам менен эсептөөлөрдү жүргүзүүгө мүмкүндүк берет.

**Мисал.** Төмөнкү Кошинин маселесин

$$y' = x + y,$$

$$y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$



Рунге-Куттанын методу менен  $n = 10$  үчүн жакындатып чыгаргыла жана аны

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

так чыгарылышы менен салыштыргыла,  $h = 0.1$ .

Чыгаруу.  $i = 0$  болгондо  $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$  белгилүү, андыктан  $k_0, k_1, k_2, k_3$  жана  $y_1$  аныкталат:

$$k_0 = 0 + 1 = 1,$$

$$k_1 = 0 + 0.1/2 + 1 + 0.1 \cdot 1/2 = 1.1,$$

$$k_2 = 0 + 0.1/2 + 1 + (0.1 \cdot 1.1)/2 = 1.105,$$

$$k_3 = 0 + 0.1 + 1 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2105,$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6} \cdot [1 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105] = 1.1103.$$

$i = 1$  болгондо,  $x_1 = 0.1, y_1 = 1.1103$  белгилүү,  $k_0, k_1, k_2, k_3$  жана  $y_2$  аныкталат:

$$k_0 = 0.1 + 1.1103 = 1.2103,$$

$$k_1 = 0.1 + 0.1/2 + 1.1103 + 0.1 \cdot 1.2103/2 = 1.3209,$$

$$k_2 = 0.1 + 0.1/2 + 1.1103 + (0.1 \cdot 1.3209)/2 = 1.3264,$$

$$k_3 = 0.1 + 0.1 + 1.1103 + 0.1 \cdot 1.3264 = 1.4430,$$

$$y_2 = 1.1103 + \frac{0.1}{6} \cdot [1.2103 + 2 \cdot 1.3209 + 2 \cdot 1.3264 + 1.4430] = 1.2428.$$

Ушул сыяктуу улантып,  $y_3, y_4, \dots, y_{10}$  табууга болот.

Төмөнкү таблицасын 2 -, 3 -, 4 -, 5 - мамычаларында тиешелүү  $k_0, k_1, k_2, k_3$  жакындатылган маанилери, алтынчы мамычасында жакындатылган  $y_i$  маанилери эсептелинген, жетинчи мамычада так чыгарылыштын маанилери жайгаштырылган,

$x_i$	$k_0$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	жак. чеч. $y_i$	так чеч. $y(x_i)$	сал. катал.
0.1	1.0000	1.1000	1.1050	1.2105	1.1103	1.1103	0.0000
0.2	1.2103	1.3209	1.3264	1.4430	1.2428	1.2428	0.0000
0.3	1.4428	1.5649	1.5711	1.6999	1.3997	1.3997	0.0000
0.4	1.6997	1.8347	1.8415	1.9839	1.5836	1.6836	0.0001
0.5	1.9836	2.1328	2.1403	2.2977	1.7974	1.7974	0.0001
0.6	2.2974	2.4623	2.4706	2.6445	2.0442	2.0442	0.0001
0.7	2.6442	2.8264	2.8356	3.0278	2.3275	2.3275	0.0001
0.8	3.0275	3.2289	3.2389	3.4514	2.6511	2.6511	0.0001
0.9	3.4511	3.6736	3.6848	3.9196	3.0192	3.0192	0.0001
1.0	3.9192	4.1652	4.1775	4.4369	3.4366	3.4366	0.0001

ал эми сегизинчи мамычада салыштырмалуу каталык эсептелинген.

Демек, таблицадан көрүнүп тургандай, эң эле так чыгарылыш болуп, төртүнчү тартиптеги Рунге-Куттанын методунда алынганы эсептелет экен.  $x_{10} = 1$  болгондо, салыштырмалуу каталык болгону 0.0001% түзөт, ал эми Эйлердин жакшыртылган методу үчүн салыштырмалуу каталык 1% түзгөн, Эйлердин методу боюнча 8% түзгөн. Дагы бир жолу салыштыруу үчүн, Кошинин маселесинин чыгарылышын, жогоруда каралган үч метод боюнча  $x_i$  чекиттеринде алынган жакындатылган маанилерин жана так чечимдин маанилерин келтирели:

$x_i$	Эйлердин методу	Эйлердин жакшыртылган методу	Рунге-Куттанын методу	Так чечимдин маанилери
0.1	1.1000	1.1100	1.1103	1.1103
0.2	1.2200	1.2421	1.2428	1.2428
0.3	1.3620	1.3985	1.3997	1.3997
0.4	1.5282	1.5818	1.5836	1.6836
0.5	1.7210	1.7949	1.7974	1.7974
0.6	1.9431	2.0409	2.0442	2.0442
0.7	2.1974	2.3231	2.3275	2.3275
0.8	2.4872	2.6456	2.6511	2.6511
0.9	2.8159	3.0124	3.0192	3.0192
1.0	3.1875	3.4282	3.4366	3.4366

Тактыкты  $h$  кадамынын маанисин кичирейтүү жолу менен көтөрүүгө болот. Кадамды кичирейтүү менен Эйлердин методунун каталыгы азаят, бирок бул учурда түйүндөрдүн саны көбөйгөндүктөн, жыйынтык тактыкка жагымсыз таасир тийгизет. Ошондуктан, Эйлердин методу салыштырмалуу эсептөө чекиттеринин саны көп эмес учурда гана анда-санда колдонулат. Эң эле көп колдонулган бир кадамдуу метод болуп, Рунге-Куттанын методу саналат.

## 7.6. Адамстын методу.

Баштапкы (7.1) дифференциалдык теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$dy(x) = f(x, y)dx. \quad (7.15)$$

Бул теңдеменин эки жагын  $x_i$  ден  $x_{i+1}$  ге чейин  $x$  боюнча интегралдасак, анда сол жагындагы интеграл жеңил эле эсептелинет:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy(x) = y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i. \quad (7.16)$$

Ал эми (7.15) теңдеменин оң жагындагы интегралды эсептөө үчүн,  $f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \dots, f(x_i, y_i)$  маанилери боюнча  $[x_i, x_{i+1}]$  кесиндисинде  $f(x, y)$  функциясын, адегенде  $(k-1)$ -даражадагы  $P_{k-1}(x)$  интерполяциялык көп мүчөсү түзүлгөндөн кийин, жакындатып алмаштырабыз. Анда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (7.17)$$

Алынган (7.16) жана (7.17) туюнтмаларынын оң жактарын барабарлап,  $x_{i+1}$  түйүнүндөгү таблицада берилген  $y_{i+1}$  белгисиз функциянын маанисин аныктоо үчүн формула алабыз:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx.$$

Бул формуланын негизинде каалагандай тартиптеги тактыкта ар түрдүү көп кадамдуу методдорду түзүүгө болот. Тартиптин тактыгы, алдыңкы  $k$  кадамда эсептелинген, таблицадагы  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$  функцияларынын маанилерин пайдаланып түзүлгөн  $P_{k-1}(x)$  интерполяциялык көп мүчөсүнүн даражасынан көз каранды.

Кеңири тараган көп кадамдуу методдордун түркүмү болуп, Адамстын методдору саналат. Алардын эң жөнөкөйү  $k=1$  болгондо, мурда каралган биринчи тартиптеги тактыктагы Эйлердин методу менен дал келет. Практикалык эсептөөлөрдө төртүнчү тартиптеги тактыкка ээ болгон жана ар бир кадамда мурунку төрт жыйынтыкты пайдаланган, Адамстын методунун варианты көбүрөөк пайдаланылгандыктан, аны дайыма Адамстын методу деп аташат. Бул методду карайлы.

Айталы, төрт ( $k=4$ ) удаалаш түйүндө  $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$  маанилери табылган болсун. Ошондой эле, оң жагынын  $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$  маанилери дагы мурда эсептелинген болсун, мында  $f_i = f(x_i, y_i)$ .  $P_3(x)$  интерполяциялык көп мүчөсү катары, турактуу  $h$  кадамы менен Ньютондун экинчи интерполяциялык көп мүчөсүн алалы:

$$P_3(x) = f_i + t\Delta f_i + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_i + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 f_i,$$

мында  $x_i$  түйүнүндөгү оң жактары үчүн чектүү айырмалар төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$

$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

Анда

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i + t\Delta f_i + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_i + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 f_i) dt = \\ &= y_i + \left[ t f_i + \frac{t^2}{2} \Delta f_i + \frac{1}{2} \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Delta^2 f_i + \frac{1}{6} \left( \frac{t^4}{4} + t^3 + t^2 \right) \Delta^3 f_i \right]_{x_i}^{x_{i+1}}, \end{aligned}$$

мындан төртүнчү тартиптеги Адамстын методун төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} \Delta f_i + \frac{5h^3}{12} \Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8} \Delta^3 f_i. \quad (7.18)$$

Адамстын методу менен ошол эле тактыктагы Рунге-Куттанын методун салыштырып көрсөк, анын пайдалуу жагы ар бир кадамда оң жагынын маанисин бир эле жолу эсептөөнү талап кылат, ал эми Рунге-Куттанын методунда ар бир кадамда оң жагын төрт жолу эсептөөгө туура келет. Бирок, Адамстын методу белгилүү болгон бир эле  $y_0$  мааниси боюнча эсептөөнү баштай албагандыгыбыздын себебинен ыңгайсыз. Эсептөө  $x_0$  чекитинен эмес,  $x_3$  чекитинен гана башталышы мүмкүн.  $y_4$  маанисин эсептөө үчүн керек болгон  $y_1, y_2, y_3$  маанилерин башка методдордун жардамында алабыз, мисалы Рунге-Куттанын методу менен.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөнкү Коши маселелерин  $[0, 1]$  кесиндисинде Эйлердин, Эйлердин жакшыртылган жана Рунге-Куттанын методдору боюнча эсептегиле жана так чыгарылышы менен салыштыргыла:

а)  $y' = x + y, y(0) = 0.8, h = 0.1.$

б)  $y' = e^x + y, y(0) = 1.2.$

в)  $y' = xy + \sin x, y(0) = 2.$

г)  $y' = e^{x+y}, y(0) = -1.$

д)  $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0.$

## АДАБИЯТТАР

1. Турчак Л. И. Основы численных методов. –М.: Наука, 1987.
2. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. И доп. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. –М.: Наука, 1970, 2006.
4. Заварькин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. –М.: Просвещение, 1990.
5. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. –М.: Физматлит, 1994.
6. Исаков В. Н. Элементы численных методов. –М.: Издательский центр «Академия», 2003.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. –М.: Наука, 1989.
8. Заварькин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Техника вычислений и алгоритмизация. –М.: Просвещение, 1987.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы. –М.: Наука, 1973.
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. –М.: Физматгиз, 1966. –Ч. I, II.
11. Калиткин Н. Н. Численные методы. –М.: Наука, 1978.
12. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1977.
13. Карманов В. Г. Математическое программирование. –М.: Наука, 1986.
14. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. –М.: Наука, 1972.
15. Никольский С. М. Квадратурные формулы. –М.: Наука, 1979.
16. Иванова Т. П., Пухова Г. В. Программирование и вычислительная математика. –М.: Просвещение, 1978.
17. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. –М.: Наука, 1972.
18. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. –М.: Просвещение, 1988.
19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т1, Т2. –М.: Наука, 1969.
20. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. –М.: Мир, 1980.

Басууга берилди: 15.04.2011.

Формат: 60x84 1/16  
Буйрутма: №8

Көлөмү: 11,25 б.т.  
Нускасы: 500

---

*«Кагаз иштери» компьютердик кызматында басылды.  
Дареги: Ош шаары, Сулайманов көчөсү №3*





961318